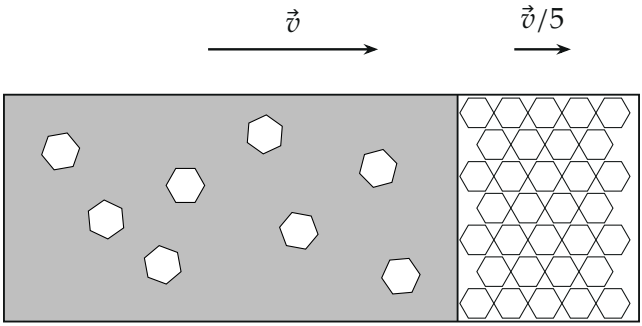
Граница льда на реке

Задача 3. [Росатом 2019/20, 7 класс, задача 3] По реке со скоростью v плывут небольшие льдины, покрывая одну шестую часть поверхности воды. Из-за сужения реки впереди по течению льдины скапливаются, полностью покрывая поверхность воды, и движутся со скоростью $v/5$ (см. рисунок). В какую сторону и с какой средней скоростью движется граница сплошного льда. В рассматриваемой области ширина реки не меняется, льдины не перекрываются.



▲ **Решение. Что происходит.** Слева лёд редкий — льдины занимают $1/6$ поверхности и плывут быстро, справа лёд сплошной и ползёт медленно. Граница между ними — не тело, а место, где льдины «упираются» в затор; её скорость определяется тем, сколько льда к ней приносит течение и сколько уносит. Удобнее всего перейти в систему отсчёта, где граница покоится: тогда лёд через неё не копится — сколько подплыло, столько и уплыло. Класс задачи — кинематика потока и переход в движущуюся систему отсчёта.

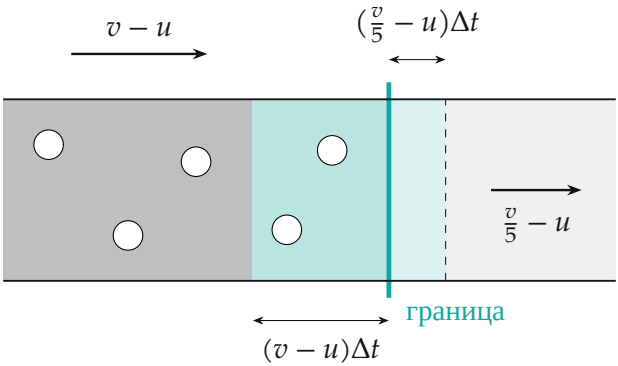
Обозначения. b — ширина реки, u — скорость границы относительно берега (считаем её направленной по течению; знак ответа покажет, верно ли), Δt — малый промежуток времени, ΔS и ΔS_1 — площади льда, подплывающего к границе и уплывающего от неё за Δt.

1. Переход в систему отсчёта границы. Ось x направим по течению. Скорость тела относительно границы равна скорости относительно бе-

рега минус скорость границы (закон сложения скоростей Галилея):

$$v_{\text{отн}} = v - u \text{ (редкий лёд)}, \qquad v_{1\,\text{отн}} = \frac{v}{5} - u \text{ (сплошной лёд)}.$$

В этой системе редкие льдины подплывают к границе слева, а сплошной лёд уходит от неё вправо.



В системе отсчёта границы: за Δt к ней подплывают льдины из полосы шириной $(v-u)\Delta t$, а от неё уходит сплошной лёд из полосы $(\frac{v}{5}-u)\Delta t$

2. Сколько льда подплывает. За время Δt границы достигнут льдины, которые были от неё ближе, чем $(v-u)\Delta t$. Полоса воды такой длины имеет площадь $(v-u)\Delta t\, b$, а льдины покрывают шестую часть её:

$$\Delta S = \frac{1}{6}\,(v-u)\,\Delta t\, b.$$

3. Сколько льда уплывает. Сплошной лёд покрывает всю поверхность, и за Δt от границы уходит полоса длиной $(\frac{v}{5}-u)\Delta t$:

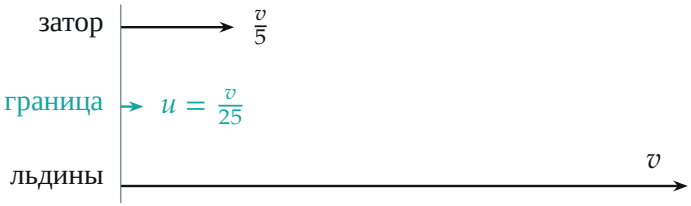
$$\Delta S_1 = \Big(\frac{v}{5} - u\Big)\Delta t\, b.$$

4. Баланс льда. Граница в своей системе покоится, лёд на ней не копится и не исчезает (льдины не перекрываются и не тают), поэтому

$\Delta S = \Delta S_1$:

$$\frac{1}{6}(v-u) = \frac{v}{5} - u \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{6}u = \frac{v}{5} - \frac{v}{6} = \frac{v}{30} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{v}{25}.$$

Знак словами: $u > 0$, значит, граница движется в ту сторону, что мы выбрали, — по течению.



Скорости относительно берега в масштабе: граница ползёт в 5 раз медленнее затора и в 25 раз медленнее льдин

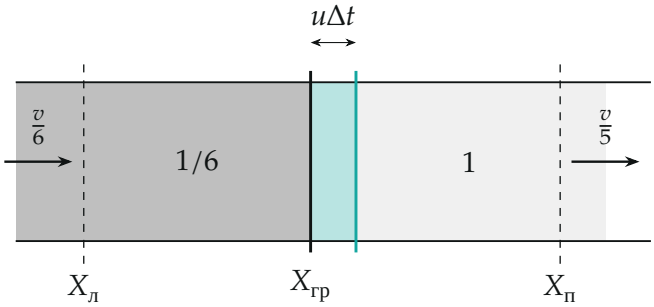
5. Второй способ — баланс льда на неподвижном участке. Возьмём неподвижный относительно берега участок реки между точками $X_л$ и $X_п$, внутри которого находится граница $X_{гр}$. Площадь льда на нём

$$S_л = b\Big[\frac{1}{6}(X_{гр} - X_л) + (X_п - X_{гр})\Big].$$

За время Δt граница сдвигается на $u\Delta t$, и площадь льда меняется на $b(\frac{1}{6} - 1)u\Delta t = -\frac{5}{6}\,b\,u\Delta t$. Это изменение равно притоку через левый край минус отток через правый: слева льдины приносят $\frac{1}{6}v\Delta t\,b$, справа затор уносит $\frac{v}{5}\Delta t\,b$:

$$-\frac{5}{6}u = \frac{v}{6} - \frac{v}{5} = -\frac{v}{30} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{v}{25}.$$

Ответ тот же.



Неподвижный участок $[X_л, X_п]$: слева втекает лёд с «плотностью потока» $v/6$, справа вытекает $v/5$; бирюзовая полоса $u\Delta t$ из сплошной становится редкой

Обратите внимание. Отток $\frac{v}{5}$ больше притока $\frac{v}{6}$: льда уходит больше, чем приходит, поэтому затор не нарастает назад против течения, а «тает» с хвоста — граница уходит по течению. Интуиция «затор растёт навстречу льдинам» здесь неверна.

Проверка. Размерность: u — скорость, как и v. Предел: если бы сплошной лёд стоял ($v/5 \to 0$), из $\frac{1}{6}(v-u) = -u$ вышло бы $u = -\frac{v}{5}$ — граница пошла бы против течения, затор рос бы, как и должно быть. Если бы сплошной лёд шёл со скоростью $v/6$, приток и отток совпали бы и граница стояла бы: $\frac{1}{6}(v-u) = \frac{v}{6} - u \Rightarrow u = 0$ — верно.

Ответ. Граница сплошного льда движется по течению со скоростью $u = \dfrac{v}{25}$.