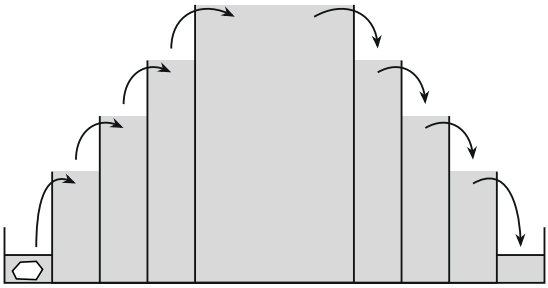
# Пять вставленных сосудов и камень

**Задача 4.** [Росатом 2019/20, 7 класс, задача 4] Пять цилиндрических сосудов вставлены друг в друга. Площадь основания самого маленького сосуда $S$, у остальных — $2S$, $3S$, $4S$ и $5S$. Высота самого широкого сосуда — $h$, остальных — $2h$, $3h$, $4h$ и $5h$ (см. рисунок). В сосуды налита вода: во все внутренние — до верху, в самый широкий — до половины. Кроме того, в самом широком стакане лежит камень, полностью покрытый водой. Камень перекладывают последовательно в более широкие сосуды, а затем назад. После того как камень снова оказался в самом широком сосуде, широкий сосуд будет заполнен водой до самого верха, при этом вода из этого сосуда не выливалась. Найти отношение суммарного объема воды в сосудах к объему камня. Указание. Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

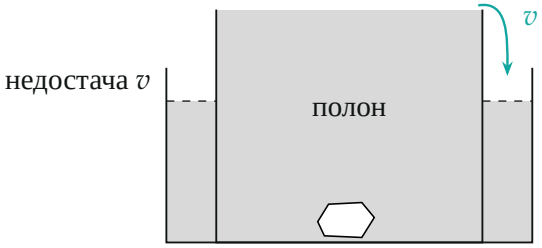


▲ **Решение. Что происходит.** Внутренние сосуды полны до краёв, поэтому камень, опущенный в любой из них, вытесняет воду через край — она стекает в соседний, более широкий сосуд, а если и тот полон — дальше, вплоть до самого широкого, который заполнен лишь наполовину. Вынутый камень оставляет в сосуде недостачу воды, равную своему объёму. Класс задачи — закон Архимеда в простейшей форме: погружённое тело вытесняет свой объём жидкости; дальше — учёт объёмов.

**Обозначения.** $v$ — объём камня, $V$ — суммарный объём воды. Сосуды нумеруем от самого узкого (1, площадь $S$, высота $5h$) до самого широкого (5, площадь $5S$, высота $h$). Сосуд $k$ стоит внутри сосуда $k+1$,

поэтому свободная от внутреннего сосуда площадь любого из сосудов 2–5 равна $kS - (k-1)S = S$.

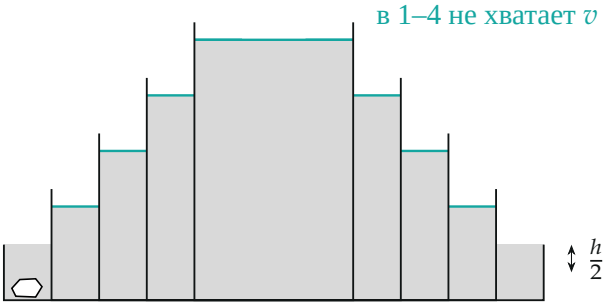
**1. Один шаг перекладывания.** Камень вынимают из сосуда и кладут в соседний, более узкий, полный до края. Объём $v$ выливается через край узкого сосуда в широкий — ровно туда, откуда камень только что вынули, и восполняет недостачу. На пути внутрь (5→4→3→2→1) уровни не меняются: все внутренние сосуды остаются полными, в сосуде 5 воды по-прежнему $Sh/2 - v$ (с камнем — половина).




*Камень опущен в полный сосуд: вода объёмом $v$ переливается через край в соседний сосуд и восполняет недостачу, оставшуюся там от вынутого камня*

**2. Путь назад.** Теперь камень вынимают из сосуда 1 (в нём остаётся недостача $v$) и кладут в сосуд 2. Сосуд 2 полон, из него выливается $v$ в сосуд 3 — он тоже полон, вода бежит дальше в 4, тоже полный, и в итоге $v$ попадает в сосуд 5. Так на каждом шаге назад: в сосуде, откуда вынули камень, остаётся недостача $v$, а вытесненная вода уходит в самый широкий сосуд. Шагов назад четыре (1→2, 2→3, 3→4, 4→5), поэтому в конце

- в каждом из сосудов 1–4 не хватает до края объёма $v$;
- в сосуд 5 пришло $4v$ воды.




*Конец: в каждом из сосудов 1–4 недостача $v$ (бирюзовые уровни), сосуд 5 долит доверху*

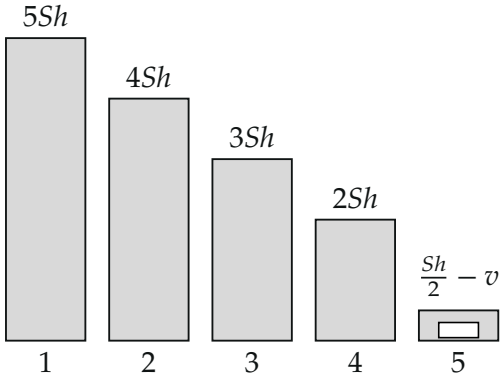
**3. Объём камня.** В сосуде 5 вода поднялась от половины ($h/2$) до края ($h$), камень лежит там же, где и в начале. Площадь, свободная от сосуда 4, равна $S$, и сосуд 4 выше сосуда 5 ($2h > h$), так что эта площадь одинакова по всей высоте. Пришедшая вода $4v$ заняла объём $S \cdot \dfrac{h}{2}$:

$$4v = S\frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Sh}{8}.$$

**4. Суммарный объём воды.** Считаем в начальном состоянии. В каждом сосуде вода занимает только площадь $S$, свободную от вставленного сосуда (у сосуда 1 — всю его площадь $S$):

$$V = \underbrace{5Sh}_{1} + \underbrace{4Sh}_{2} + \underbrace{3Sh}_{3} + \underbrace{2Sh}_{4} + \underbrace{\left(S\frac{h}{2} - v\right)}_{5} = \frac{29}{2}Sh - v.$$

В сосуде 5 вычитаем $v$: половину высоты занимают вода и камень вместе.




*Вода в каждом сосуде, «распрямлённая» в столбик основанием $S$ (под номером — сосуд); в пятом столбике часть объёма занимает камень*

**5. Отношение.** Подставляем $v = Sh/8$:

$$V = \frac{29}{2}Sh - \frac{Sh}{8} = \frac{115}{8}Sh, \qquad \frac{V}{v} = \frac{115\,Sh/8}{Sh/8} = 115.$$

**Обратите внимание.** На пути внутрь уровни не меняются — вся «работа» делается на пути назад: вода, вытесненная камнем в полном внутреннем сосуде, проходит через все промежуточные (они полны) прямо в самый широкий. Сосуды 2–4 при этом лишь «пропускают» воду. У организаторов в решении найдено обратное отношение $v/V = 1/115$, а спрошено $V/v$.

**Проверка.** Размерность: отношение объёмов безразмерно. Подсчёт по конечному состоянию: в сосудах 1–4 воды $14Sh - 4v$, в сосуде 5 — $Sh - v$ (доверху вместе с камнем); сумма $15Sh - 5v = 15Sh - \frac{5}{8}Sh = \frac{115}{8}Sh$ — то же, вода не потерялась.

**Ответ.** $\dfrac{V}{v} = 115.$