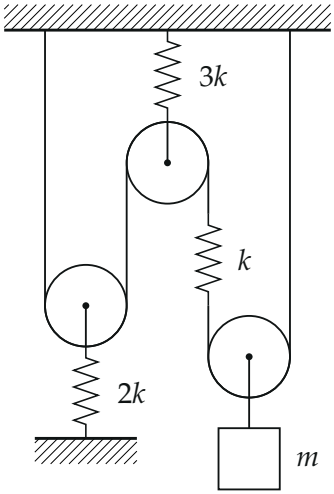
Груз на пружинах и блоках

Задача 5. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 7 класс, задача 5] На какое расстояние переместится тело массой m в системе, показанной на рисунке, по сравнению с положением, в котором пружины не деформированы. Коэффициенты жесткости пружин показаны на рисунке, блоки невесомы, нити нерастяжимы.



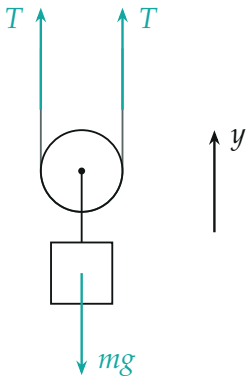
▲ **Решение. Что происходит.** Одна и та же нить обходит все три блока, а пружина жёсткостью k вставлена прямо в эту нить, между средним и правым блоками. Блоки невесомы, поэтому натяжение нити везде одно и то же. Класс задачи — статика системы блоков плюс кинематическая связь: сначала по равновесию находим силы, по закону Гука — деформации пружин, а затем считаем, насколько удлинилась та часть нити, на которой висит груз.

Обозначения. T — натяжение нити; F_{2k}, F_{3k}, F_k — силы упругости пружин; Δx_1, Δx_2, Δx_3 — деформации пружин $2k$, $3k$ и k; Δx — искомое опускание груза. Все нити и пружины вертикальны.

1. Натяжение нити. Рассмотрим тело m вместе с правым блоком (блок невесом). Вверх на эту систему тянут два вертикальных куска

одной нити, по T каждый, вниз — сила тяжести mg. Первый закон Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$2T - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{2}.$$



Тело вместе с правым блоком: два куска нити тянут вверх, сила тяжести — вниз

2. Силы упругости пружин. Теперь по очереди блоки.

Левый блок охватывает нить снизу: оба её куска идут от него вверх и тянут его вверх с силой $2T$. Удерживает его пружина $2k$, привязанная к полу, — она растянута и тянет блок вниз:

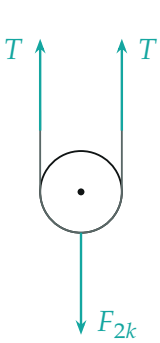
$$F_{2k} = 2T = mg.$$

Средний блок нить охватывает сверху: оба куска идут от него вниз и тянут его вниз с силой $2T$. Держит его пружина $3k$ под потолком:

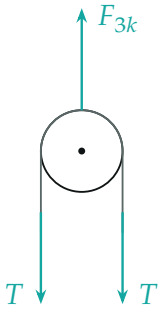
$$F_{3k} = 2T = mg.$$

Пружина k — часть самой нити, через неё передаётся натяжение нити:

$$F_k = T = \frac{mg}{2}.$$



левый блок



средний блок

Силы на левый и средний блоки: нить тянет каждый с силой $2T$, пружина уравновешивает

3. Деформации пружин. Закон Гука $F = k_i x_i$ для каждой пружины:

$$\Delta x_1 = \frac{F_{2k}}{2k} = \frac{mg}{2k}, \qquad \Delta x_2 = \frac{F_{3k}}{3k} = \frac{mg}{3k}, \qquad \Delta x_3 = \frac{F_k}{k} = \frac{mg}{2k}.$$

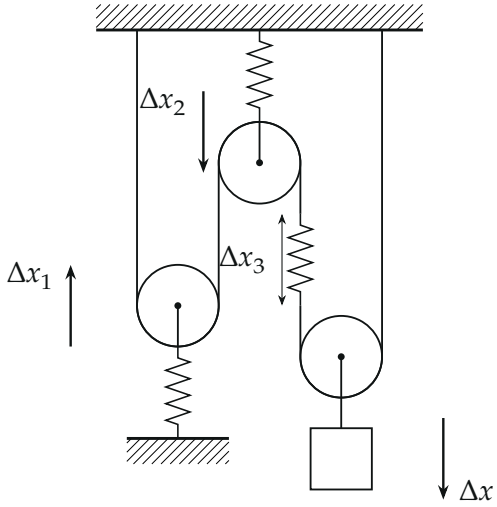
Знаки словами: пружина $2k$ растянута, поэтому левый блок поднялся на Δx_1; пружина $3k$ растянута, поэтому средний блок опустился на Δx_2; пружина k растянута, нить стала длиннее на Δx_3.

4. Связь перемещений. Нить нерастяжима, но её участок, на котором висит правый блок, получает «лишнюю» длину из трёх источников:

- левый блок поднялся на Δx_1 — оба куска нити у потолка и между левым и средним блоками стали короче на Δx_1 каждый, освободилось $2\Delta x_1$;
- средний блок опустился на Δx_2 — кусок к левому блоку и кусок к правому блоку стали короче на Δx_2 каждый, освободилось $2\Delta x_2$;
- пружина k растянулась — длина нити выросла на Δx_3.

Вся освободившаяся длина уходит в два вертикальных куска, охватывающих правый блок. Каждый из них удлиняется на Δx, поэтому

$$2\Delta x = 2\Delta x_1 + 2\Delta x_2 + \Delta x_3.$$



Куда сдвигается каждый блок: левый вверх, средний вниз, пружина k удлиняет нить, груз опускается на Δx

5. Ответ в общем виде и числами. Из связи перемещений

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \frac{\Delta x_3}{2} = \frac{mg}{2k} + \frac{mg}{3k} + \frac{mg}{4k} = \frac{13\,mg}{12\,k}.$$

Обратите внимание. Пружина k не держит средний блок за ось — она вставлена в нить. Поэтому её сила равна $T = mg/2$, а не mg, и её растяжение входит в опускание груза с коэффициентом $1/2$: удлинение нити делится между двумя кусками, на которых висит правый блок.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Н}}{\text{Н/м}} = \text{м}$. Предел: если все пружины сделать бесконечно жёсткими ($k \to \infty$), груз не сдвинется, $\Delta x \to 0$ — верно. Второй способ — энергия: работа силы тяжести при медленном опускании равна запасённой энергии пружин, $\dfrac{mg\Delta x}{2} = \dfrac{2k\Delta x_1^2}{2} + \dfrac{3k\Delta x_2^2}{2} + \dfrac{k\Delta x_3^2}{2} = \dfrac{(mg)^2}{k}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{13(mg)^2}{24k}$, откуда $\Delta x = \dfrac{13mg}{12k}$ — то же.

Ответ. Тело опустится на $\Delta x = \dfrac{13\,mg}{12\,k}$.