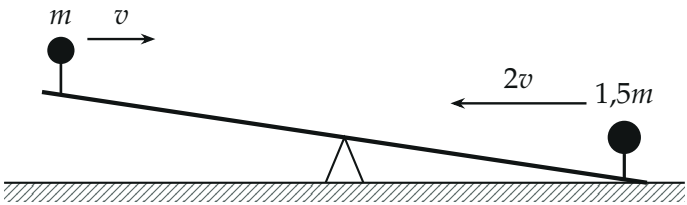
Мальчики на доске

Задача 1. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 8 класс, площадка 1, задача 1] На концах невесомой доски длиной l стоят мальчики, массы которых равны m и $1{,}5m$. Посередине доски находится опора. Мальчики начинают аккуратно двигаться к середине доски со скоростями v и $2v$ соответственно. Через какое время доска окажется в горизонтальном положении?



Поясняющий рисунок: вначале перевешивает тяжёлый мальчик

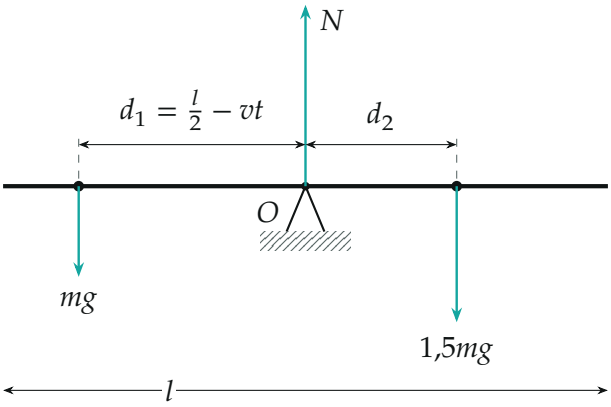
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на правило моментов (условие равновесия рычага). Вначале плечи одинаковы, и перевешивает более тяжёлый мальчик. Но он идёт к опоре вдвое быстрее, его плечо уменьшается быстрее, и в какой-то момент моменты сил сравняются — тогда доска и окажется горизонтальной.

Обозначения. O — опора, d_1 и d_2 — расстояния от опоры до мальчиков массами m и $1{,}5m$ в момент t после начала движения. Мальчики идут «аккуратно» — медленно и плавно, поэтому их давление на доску равно силе тяжести: mg и $1{,}5mg$.

1. Плечи в момент t. Каждый мальчик начинает на расстоянии $\dfrac{l}{2}$ от опоры и равномерно идёт к ней:

$$d_1 = \frac{l}{2} - vt, \qquad d_2 = \frac{l}{2} - 2vt.$$

Эти формулы верны, пока мальчики не дошли до середины: $t < \dfrac{l}{4v}$ для второго.



Силы, действующие на доску в момент равновесия: давления мальчиков и сила реакции опоры

2. Условие равновесия. Доска невесомая, на неё действуют давления мальчиков mg и $1{,}5mg$ и сила реакции опоры N. Запишем правило моментов относительно точки O — выбираем её, чтобы момент неизвестной силы N был равен нулю:

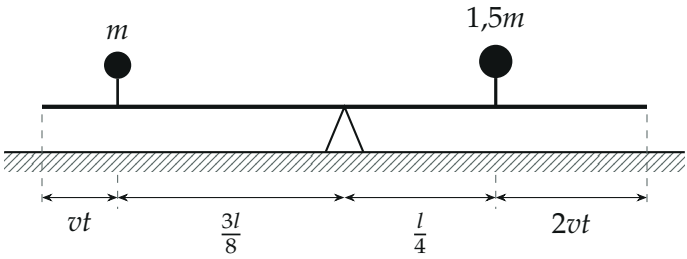
$$mg\,d_1 = 1{,}5mg\,d_2.$$

Масса и g сокращаются:

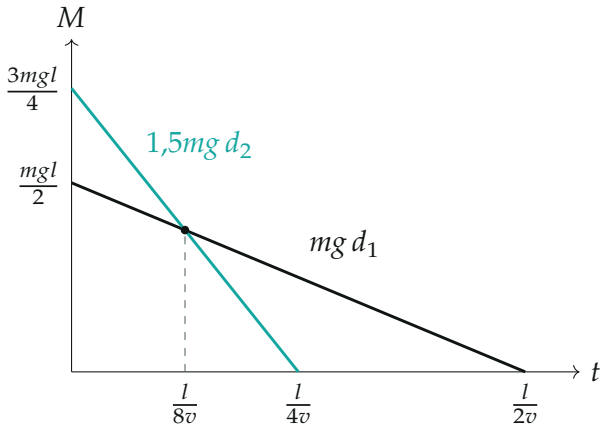
$$\frac{l}{2} - vt = \frac{3}{2}\left(\frac{l}{2} - 2vt\right) \quad \Rightarrow \quad 3vt - vt = \frac{3l}{4} - \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad 2vt = \frac{l}{4},$$

$$t = \frac{l}{8v}.$$

3. Действительно ли этот момент наступает. В момент $t = \dfrac{l}{8v}$ плечи равны $d_1 = \dfrac{3l}{8}$, $d_2 = \dfrac{l}{4}$: оба мальчика ещё на доске и не дошли до опоры, формулы пункта 1 применимы. До этого момента момент силы тяжёлого мальчика больше, после — меньше: перевес переходит на другую сторону.



Момент $t = l/(8v)$ (в масштабе): лёгкий прошёл $l/8$, тяжёлый $l/4$, доска горизонтальна



Моменты сил тяжести мальчиков относительно опоры: прямые пересекаются при $t = l/(8v)$

Обратите внимание: доска горизонтальна не тогда, когда мальчики на равных расстояниях от опоры, а когда равны моменты сил: более тяжёлому нужно плечо в 1,5 раза меньше.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{м}}{\text{м/с}} = \text{с}$. Второй способ — через отношение плеч: в равновесии $d_1 = 1{,}5\,d_2$. Сумма $d_1 + d_2 = l - 3vt$, а при $d_1 = 1{,}5d_2$ она равна $2{,}5d_2$. Подставляем $t = \frac{l}{8v}$: $l - \frac{3l}{8} = \frac{5l}{8} = 2{,}5 \cdot \frac{l}{4}$ — верно.

Ответ. $t = \frac{l}{8v}$.