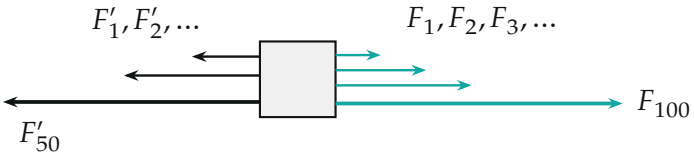
Равнодействующая ста и пятидесяти сил

Задача 4. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 8 класс, площадка 1, задача 4] На тело действуют силы: $F_1 = 1$ Н, $F_2 = 2$ Н, $F_3 = 3$ Н, …, $F_{100} = 100$ Н, направленные в одну сторону, и силы $F'_1 = 3$ Н, $F'_2 = 6$ Н, $F'_3 = 9$ Н, … $F'_{50} = 150$ Н, направленные противоположно. Найти равнодействующую этих сил.



Поясняющий рисунок: две группы сил вдоль одной прямой (длины стрелок условны)

▲ **Решение. Что происходит.** Все силы лежат на одной прямой, поэтому равнодействующая — алгебраическая сумма их проекций. Главное — сложить быстро сто и пятьдесят слагаемых: обе группы образуют арифметические прогрессии, а сумму $1 + 2 + \ldots + N$ считают приёмом «пар».

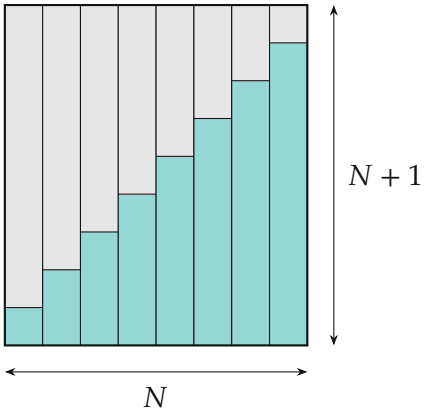
Обозначения. Ось x направим вдоль сил $F_1, \ldots, F_{100}$. $f_0 = 1$ Н; тогда $F_n = nf_0$ и $F'_n = 3nf_0$. $S_N = 1 + 2 + \ldots + N$.

1. Сумма $1 + 2 + \ldots + N$**.** Запишем сумму дважды — в прямом и в обратном порядке — и сложим столбиками: в каждом столбике $N + 1$, столбиков N:

$$\begin{array}{rcccccc} S_N & = & 1 & + & 2 & + \ldots + & N \\ S_N & = & N & + & (N-1) & + \ldots + & 1 \\ \hline 2S_N & = & (N+1) & + & (N+1) & + \ldots + & (N+1) = N(N+1) \end{array}$$

Отсюда

$$S_N = \frac{N(N+1)}{2}.$$



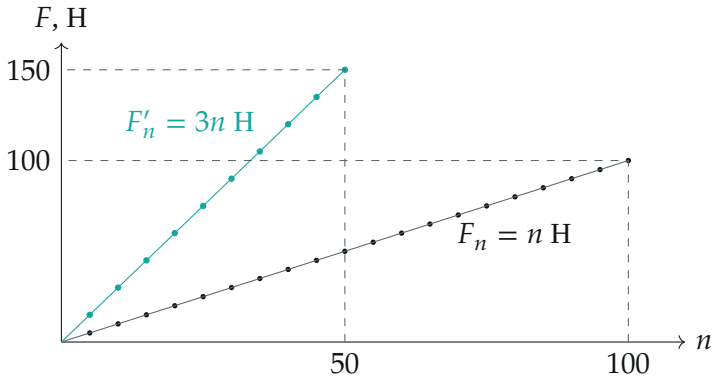
Пример $N = 8$: столбики $1, 2, \ldots, N$ (бирюза) и та же лесенка, перевёрнутая (серая), заполняют прямоугольник $N \times (N + 1)$

2. Сумма первой группы. Проекции всех сил F_n на ось x положительны:

$$F_1 + \ldots + F_{100} = (1 + 2 + \ldots + 100)f_0 = \frac{100 \cdot 101}{2} f_0 = 5050 f_0.$$

3. Сумма второй группы. Каждая сила F'_n втрое больше nf_0, общий множитель 3 выносим:

$$F'_1 + \ldots + F'_{50} = 3(1 + 2 + \ldots + 50)f_0 = 3 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} f_0 = 3 \cdot 1275 f_0 = 3825 f_0.$$

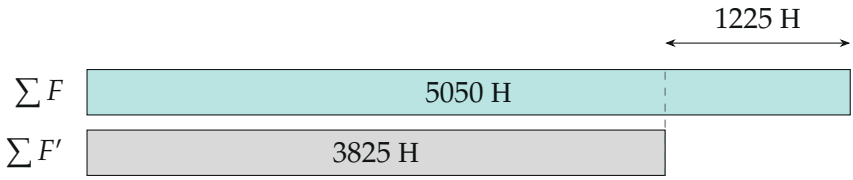


Силы обеих групп (точки — каждая пятая сила): их сумма близка к площади треугольника под прямой: ≈ 5000 у первой группы и ≈ 3750 у второй

4. Равнодействующая. Проекция равнодействующей на ось x — сумма проекций всех сил; проекции сил второй группы отрицательны:

$$R_x = 5050 f_0 - 3825 f_0 = 1225 f_0 = 1225 \text{ Н}.$$

Проекция положительна: равнодействующая направлена так же, как силы $F_1, \ldots, F_{100}$.



Суммы двух групп в масштабе: равнодействующая — их разность

Обратите внимание: во второй группе 50 сил, а не 100: множитель 3 выносится, но сумма идёт только до 50.

Проверка. Второй способ — через среднее: у арифметической прогрессии сумма равна числу членов, умноженному на полусумму первого и последнего. Первая группа: $100 \cdot \dfrac{1+100}{2} = 5050$; вторая: $50 \cdot \dfrac{3+150}{2} = 3825$ — те же числа. Размерность: сумма сил — ньютоны.

Ответ. $R = 1225$ Н, направлена так же, как силы $F_1, \ldots, F_{100}$.