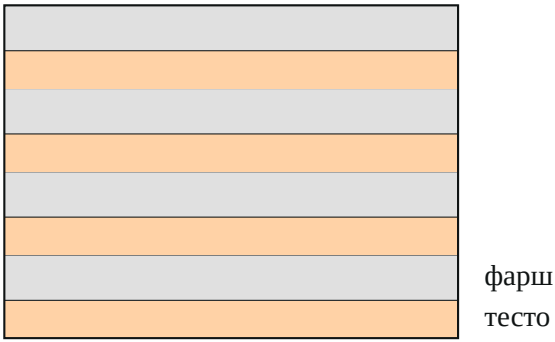
Средняя плотность лазаньи

Задача 1. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 8 класс, площадка 2, задача 1] Лазанья представляет собой вид итальянской пасты (макарон), в котором пласты макаронного теста прослаивают мясным фаршем с соусом бешамель. Считая, что слои теста и фарша имеют постоянную толщину, причем толщина слоя фарша на 20% больше толщины слоя теста, а плотность теста на 15% больше плотности фарша с соусом, найти среднюю плотность лазаньи. Плотность фарша с соусом равна ρ.



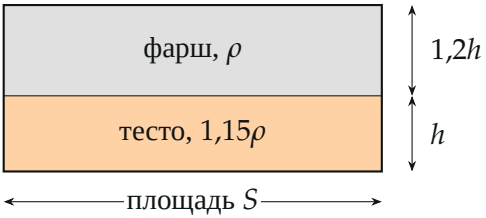
Поясняющий рисунок: разрез лазаньи — чередующиеся слои теста и фарша

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на среднюю плотность смеси: средняя плотность — полная масса, делённая на полный объём, а не среднее арифметическое плотностей. Слои чередуются, поэтому достаточно рассмотреть одну пару «слой теста + слой фарша»: у всей лазаньи отношения масс и объёмов те же.

Обозначения. S — площадь слоя (у всех слоёв одна), h — толщина слоя теста, тогда толщина слоя фарша $1{,}2h$. Плотность фарша ρ, плотность теста $\rho_т = 1{,}15\rho$.

1. Объёмы в одной паре слоёв. Объём слоя — площадь на толщину:

$$V_т = Sh, \qquad V_ф = 1{,}2\,Sh, \qquad V = V_т + V_ф = 2{,}2\,Sh.$$



Одна пара слоёв (в масштабе): из таких пар сложена вся лазанья

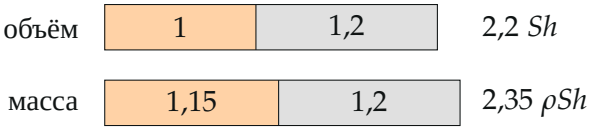
2. Массы. Масса слоя — плотность на объём:

$$m_т = 1{,}15\rho \cdot Sh, \qquad m_ф = \rho \cdot 1{,}2\,Sh, \qquad m = m_т + m_ф = 2{,}35\,\rho Sh.$$

3. Средняя плотность. По определению — полная масса на полный объём. Площадь и толщина сокращаются:

$$\rho_{ср} = \frac{m}{V} = \frac{2{,}35\,\rho Sh}{2{,}2\,Sh} = \frac{47}{44}\rho \approx 1{,}068\,\rho.$$

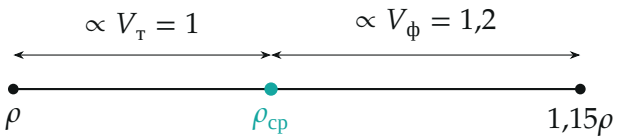
Если в лазанье N пар слоёв, массы и объёмы просто умножаются на N — отношение то же.



Объёмы (в единицах Sh) и массы (в единицах ρSh) теста и фарша в одной паре слоёв

4. Второй способ — «правило рычага». Средняя плотность лежит между ρ и $1{,}15\rho$ и делит этот отрезок в отношении, обратном объёмам: ближе к плотности той части, которой больше по объёму. Фарша больше в 1,2 раза, поэтому

$$\frac{\rho_{ср} - \rho}{1{,}15\rho - \rho_{ср}} = \frac{V_т}{V_ф} = \frac{1}{1{,}2} \quad \Rightarrow \quad \rho_{ср} = \rho + 0{,}15\rho \cdot \frac{1}{2{,}2} \approx 1{,}068\,\rho.$$



Правило рычага (в масштабе): средняя плотность ближе к плотности фарша, которого больше по объёму

Обратите внимание: средняя плотность — это не $\dfrac{\rho + 1{,}15\rho}{2} = 1{,}075\rho$: так было бы только при равных объёмах. Фарша по объёму больше, и среднее сдвинуто к его плотности.

Проверка. Размерность — плотность. Пределы: если бы толщины были равны, получили бы $1{,}075\rho$ (полусумма); если бы теста не было, — ρ. Наш ответ $1{,}068\rho$ лежит между ними и ближе к $1{,}075\rho$, потому что толщины отличаются всего на 20%. Мы считали, что слоёв теста и фарша поровну; если слоёв много, лишний слой теста сверху почти ничего не меняет.

Ответ. $\rho_{ср} = \dfrac{1{,}15 + 1{,}2}{1 + 1{,}2}\,\rho = \dfrac{47}{44}\,\rho \approx 1{,}068\,\rho.$