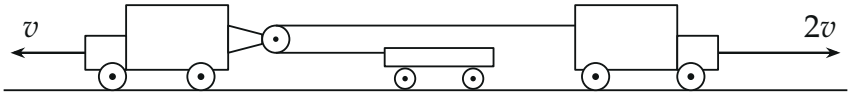
Автомобили, трос и тележка

Задача 3. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 8 класс, площадка 2, задача 3] Два автомобиля едут в противоположные стороны со скоростями v и $2v$. К одному автомобилю привязан трос, который переброшен через блок, привязанный ко второму автомобилю. Второй конец троса привязан к тележке (см. рисунок). Найти её скорость.

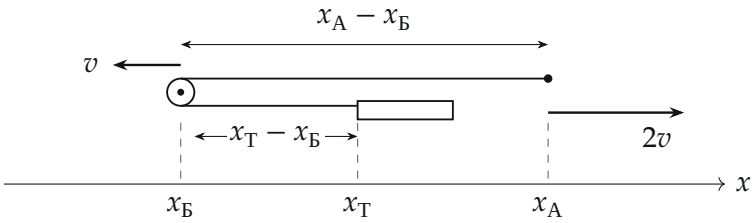


▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на кинематическую связь через нерастяжимый трос. Длина троса постоянна: на сколько удлиняется верхний участок (автомобили разъезжаются), на столько же укорачивается нижний. Кроме того, сам блок, от которого отсчитывается нижний участок, едет влево. Тележка получает оба смещения сразу.

Обозначения. Ось x направим вправо. $x_Б$ — координата блока (он едет вместе с левым автомобилем), x_A — координата точки крепления троса к правому автомобилю, $x_Т$ — координата тележки. L — длина троса (участок, огибающий блок, не меняется).

1. Связь через длину троса. Трос нерастяжимый и натянут, участки горизонтальны. Верхний участок имеет длину $x_A - x_Б$, нижний — $x_Т - x_Б$, их сумма постоянна:

$$(x_A - x_Б) + (x_Т - x_Б) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad x_Т = 2x_Б - x_A + \text{const}.$$



Координаты блока, тележки и точки крепления троса к правому автомобилю

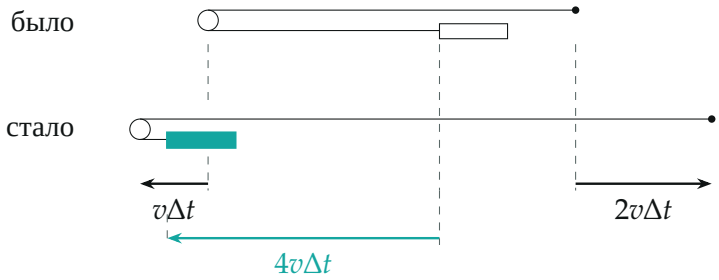
2. Скорость тележки. Изменения координат за малое время Δt связаны тем же равенством: $\Delta x_\text{Т} = 2\Delta x_\text{Б} - \Delta x_\text{А}$. Делим на Δt — получаем проекции скоростей. Блок едет влево: $v_{\text{Б}x} = -v$; правый автомобиль — вправо: $v_{\text{А}x} = 2v$. Тогда

$$v_{\text{Т}x} = 2v_{\text{Б}x} - v_{\text{А}x} = 2(-v) - 2v = -4v.$$

Знак минус: тележка едет влево, со скоростью $4v$.

3. Второй способ — по смещениям за Δt. За малое время Δt левый автомобиль с блоком сдвигается влево на $v\Delta t$, правый — вправо на $2v\Delta t$. Верхний участок троса удлиняется на $v\Delta t + 2v\Delta t = 3v\Delta t$, значит, нижний укорачивается на $3v\Delta t$. Тележка смещается влево на эти $3v\Delta t$ относительно блока и ещё на $v\Delta t$ вместе с блоком:

$$\Delta x = 3v\Delta t + v\Delta t = 4v\Delta t, \qquad v_\text{Т} = 4v.$$

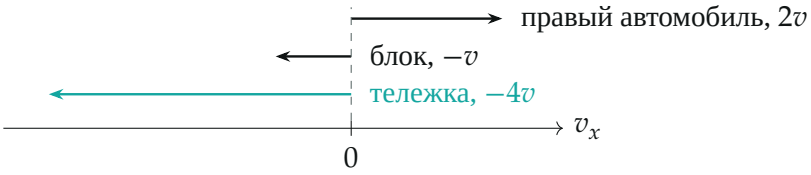


Смещения за время Δt (в масштабе $v\Delta t = 1$ клетка): тележка уходит влево на $4v\Delta t$

Обратите внимание: тележка движется быстрее обоих автомобилей. Скорость блока входит с множителем 2: блок одновременно укорачивает нижний участок (отъезжая от правого автомобиля) и тащит его начало за собой.

Проверка. Частные случаи формулы $v_{\text{Т}x} = 2v_{\text{Б}x} - v_{\text{А}x}$. Если правый автомобиль стоит, а левый едет влево со скоростью v, тележка едет влево

со скоростью $2v$ — как свободный конец верёвки у подвижного блока. Если стоит левый, а правый едет вправо с $2v$, тележка едет влево с $2v$: трос просто перетягивается через неподвижный блок. В нашей задаче оба вклада складываются: $2v + 2v = 4v$.



Проекции скоростей на ось x (в масштабе)

Ответ. $v_\text{Т} = 4v$, тележка движется влево (в сторону автомобиля со скоростью v).