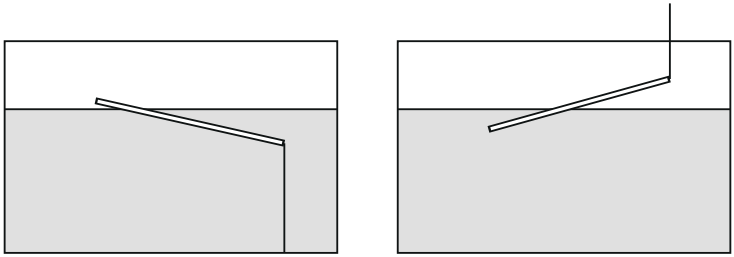
Палочка на верёвке в воде

Задача 5. [Росатом 2019/20, 8 класс, площадка 2, задача 5] Один конец тонкой деревянной палочки привязывают к веревке, второй конец которой привязывают к дну сосуда с водой. При этом веревка оказывается натянутой, палочка занимает наклонное положение и погружена в воду на $4/5$ своей длины (левый рисунок). Затем ту же палочку привязывают к веревке, заканчивающейся на некоторой высоте над поверхностью воды, опускают в воду, и палочка принимает положение, показанное на правом рисунке. На какую часть своей длины она будет погружена в воду?



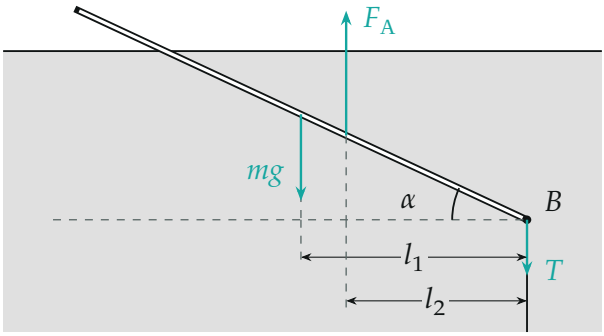
▲ **Решение. Что происходит.** Палочка лёгкая (дерево), сила Архимеда поднимает её погружённую часть, а верёвка удерживает один конец. Палочка может поворачиваться вокруг точки крепления верёвки, поэтому главный закон здесь — правило моментов относительно этой точки: тогда натяжение верёвки в уравнение не войдёт. Класс задачи — равновесие рычага в жидкости. Из первого опыта находим плотность палочки, из второго — погружённую долю.

Обозначения. L — длина палочки, S — площадь её сечения, ρ — плотность дерева, ρ_0 — плотность воды, α — угол палочки с горизонтом, x — искомая погружённая доля длины во втором опыте.

1. Где приложены силы. На палочку действуют три силы: сила тяжести $mg = \rho SLg$ — в середине палочки; сила Архимеда $F_{\text{A}} = \rho_0 g\, S\, \ell$, где ℓ — длина погружённой части, — в середине погружённой части (это центр вытесненной воды); сила натяжения верёвки — в конце палочки, вертикально. Все три силы вертикальны, поэтому плечо любой из них

относительно точки крепления равно горизонтальной проекции расстояния вдоль палочки, то есть расстоянию вдоль палочки, умноженному на $\cos\alpha$.

2. Первый опыт: плотность дерева. Верёвка привязана к нижнему концу B и тянет его вниз, погружено $\ell = \frac{4}{5}L$. Середина палочки находится на расстоянии $L/2$ от B, середина погружённой части — на расстоянии $\ell/2 = \frac{2}{5}L$.



Первый опыт: силы на палочку и их плечи относительно нижнего конца B

Правило моментов относительно точки B: момент силы тяжести (поворачивает по часовой стрелке) равен моменту силы Архимеда (против часовой), момент натяжения равен нулю:

$$mg \cdot \frac{L}{2}\cos\alpha = F_A \cdot \frac{2}{5}L\cos\alpha.$$

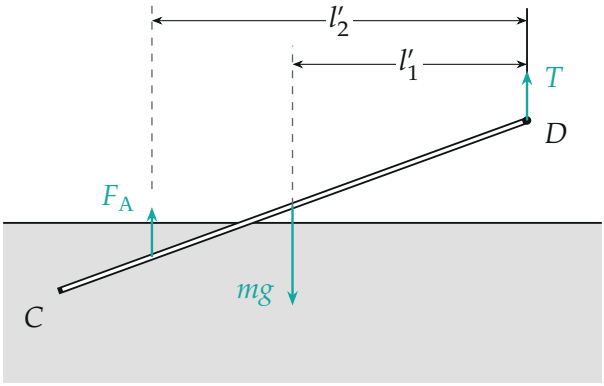
Подставим $mg = \rho SLg$ и $F_A = \rho_0 gS \cdot \frac{4}{5}L$; S, L, g и $\cos\alpha$ сокращаются:

$$\frac{\rho}{2} = \rho_0 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{16}{25}\rho_0.$$

Знак словами: $F_A = \frac{4}{5}\rho_0 gSL$ больше $mg = \frac{16}{25}\rho_0 gSL$, так что верёвка действительно тянет вниз и натянута, как сказано в условии.

3. Второй опыт: погружённая доля. Теперь верёвка привязана к верхнему концу D и тянет вверх, погружена доля x длины от нижнего

конца C. Расстояния вдоль палочки от D: до середины палочки $L/2$, до середины погружённой части $L - \frac{xL}{2}$.



Второй опыт: силы на палочку и их плечи относительно верхнего конца D

Правило моментов относительно точки D, теперь $F_A = \rho_0 g S\, xL$:

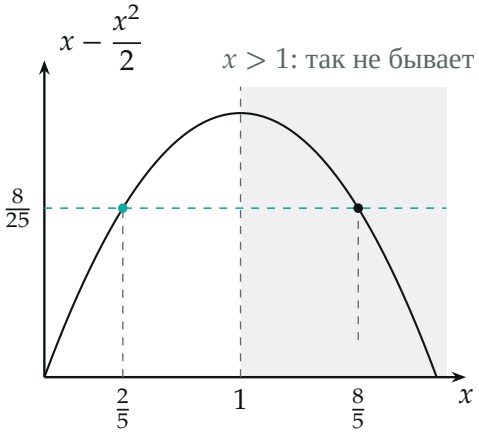
$$\rho SLg \cdot \frac{L}{2}\cos\alpha' = \rho_0 g S\, xL \cdot \left(L - \frac{xL}{2}\right)\cos\alpha'.$$

После сокращения и подстановки $\rho = \frac{16}{25}\rho_0$:

$$\frac{8}{25} = x - \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + \frac{16}{25} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 1 \pm \frac{3}{5}.$$

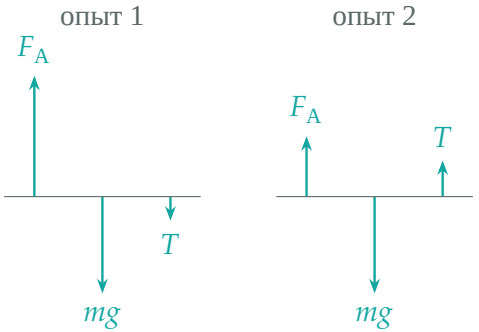
4. Выбор корня. Доля погружённой длины не может быть больше единицы, поэтому корень $x = \frac{8}{5}$ отбрасываем:

$$x = \frac{2}{5}.$$



Уравнение моментов как пересечение кривой с прямой $8/25$: физический корень один, $x = 2/5$

5. Проверка натяжения. Во втором опыте $F_A = \frac{2}{5}\rho_0 g S L = \frac{10}{25}\rho_0 g S L$ меньше $mg = \frac{16}{25}\rho_0 g S L$, так что верёвка тянет вверх с силой $T = mg - F_A > 0$ — она натянута, положение возможно.



Модули сил в двух опытах (длины стрелок пропорциональны силам): в первом верёвка тянет вниз, во втором — вверх

Обратите внимание. Сила Архимеда приложена не к середине палочки, а к середине *погружённой* части — иначе её плечо было бы равно плечу силы тяжести, и задача потеряла бы смысл. Угол наклона в обоих опытах сокращается: ответ от него не зависит.

Проверка. Размерность: в уравнении моментов слева и справа Н · м, доля x безразмерна. Предел: если бы палочка была почти такой же плотной, как вода ($\rho \to \rho_0$), во втором опыте уравнение $\rho/(2\rho_0) = x - x^2/2$ дало бы $x \to 1$ — палочка ушла бы под воду целиком, верно. Подстановка: $\frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{25} = \frac{10}{25} - \frac{2}{25} = \frac{8}{25}$ — верно.

Ответ. Палочка будет погружена на $\frac{2}{5}$ своей длины.