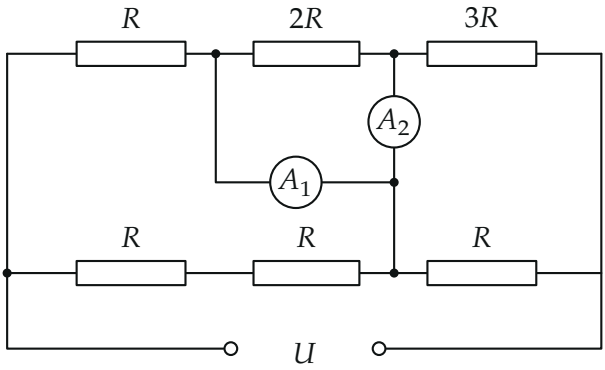
Амперметры в цепи из резисторов

Задача 1. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 9 класс, задача 1] В цепи, схема которой представлена на рисунке, сопротивление $R = 1$ кОм, амперметры сопротивлений не имеют, напряжение на зажимах источника $U = 220$ В. Значения всех сопротивлений приведены на схеме. Найти показания амперметров. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

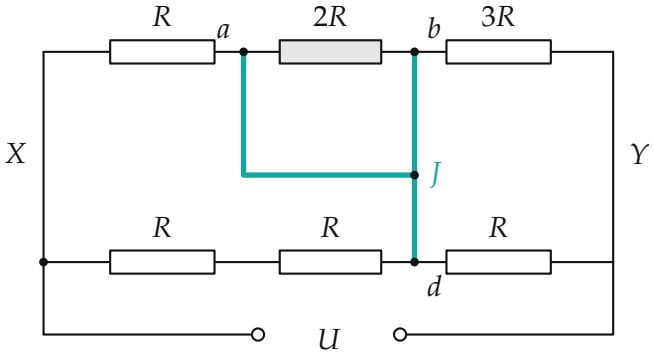


▲ **Решение.** **Что происходит.** Идеальный амперметр не имеет сопротивления, поэтому для расчёта токов он — просто провод, а показывает ток, который по этому проводу течёт. Заменив оба амперметра проводами, увидим, что концы резистора $2R$ соединены проводом, — напряжение на нём нуль, и тока через него нет. Остальное — два параллельных участка, соединённых последовательно. Найдём напряжения на участках, токи резисторов и затем по закону сохранения заряда — токи через провода, где стоят амперметры. Класс задачи: смешанное соединение, идеальные приборы.

Обозначения. X и Y — левый и правый зажимы (левый и правый вертикальные провода), a и b — верхние узлы по краям резистора $2R$, d — нижний узел между двумя правыми нижними резисторами, J — узел, где сходятся провода амперметров. I_1, I_2 — показания амперметров A_1, A_2.

1. Амперметры — провода. Амперметр A_1 соединяет узел a с узлом J, амперметр A_2 — узел b с J, а провод соединяет J с нижним узлом d. Все

четыре точки a, b, J, d — один узел с общим потенциалом (на рисунке ниже — бирюзой). Резистор $2R$ подключён между a и b: напряжение на нём нуль, по закону Ома ток через него нуль, и его можно убрать.



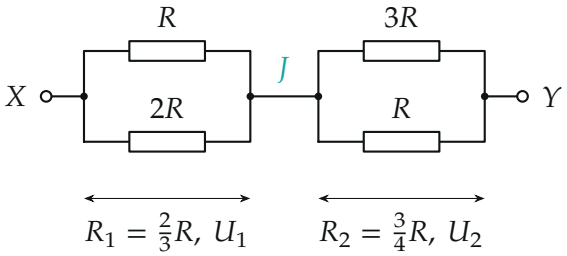
Амперметры заменены проводами: точки a, b, J, d — один узел; резистор $2R$ закорочен

2. Эквивалентная схема. Между зажимом X и общим узлом — верхний R (от X к a) и нижние $R + R = 2R$ (от X к d), они параллельны. Между общим узлом и Y — верхний $3R$ (от b к Y) и нижний R (от d к Y), тоже параллельны:

$$R_1 = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3}R, \qquad R_2 = \frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3}{4}R.$$

Участки соединены последовательно, ток через них один, и напряжения делятся пропорционально сопротивлениям:

$$U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{8}{17}U, \qquad U_2 = \frac{9}{17}U.$$



Эквивалентная схема: два параллельных участка последовательно

3. Токи резисторов (закон Ома).

$$\begin{aligned}
&\text{верхний } R\ (X \to a): && \frac{U_1}{R} = \frac{8}{17}\frac{U}{R},\\
&\text{нижние } R+R\ (X \to d): && \frac{U_1}{2R} = \frac{4}{17}\frac{U}{R},\\
&\text{верхний } 3R\ (b \to Y): && \frac{U_2}{3R} = \frac{3}{17}\frac{U}{R},\\
&\text{нижний } R\ (d \to Y): && \frac{U_2}{R} = \frac{9}{17}\frac{U}{R}.
\end{aligned}$$

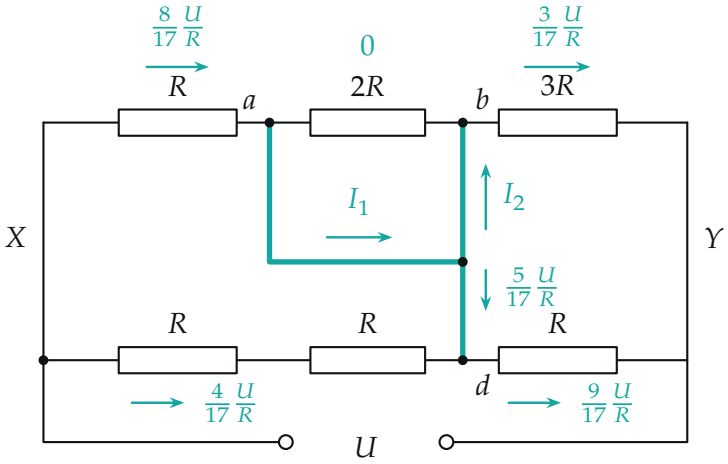
4. Показания амперметров (закон сохранения заряда в узлах). Узел a: ток верхнего R приходит в a, через $2R$ не уходит ничего, значит, весь он идёт через A_1:

$$I_1 = \frac{8}{17}\frac{U}{R} = \frac{8\cdot 220}{17\cdot 1000}\ \text{А} \approx 0{,}104\ \text{А}.$$

Узел b: ток $3R$ уходит из b к Y, а прийти в b он может только через A_2 (через $2R$ тока нет):

$$I_2 = \frac{3}{17}\frac{U}{R} = \frac{3\cdot 220}{17\cdot 1000}\ \text{А} \approx 0{,}039\ \text{А}.$$

Сверка по узлу J: в него приходит $I_1 = \frac{8}{17}\frac{U}{R}$, вверх через A_2 уходит $\frac{3}{17}\frac{U}{R}$, вниз к d — $\frac{5}{17}\frac{U}{R}$; в узле d к ним добавляются $\frac{4}{17}\frac{U}{R}$ из нижних резисторов, и в нижний правый R уходит $\frac{9}{17}\frac{U}{R}$ — как и нашли в п. 3.



Токи во всех ветвях в единицах U/R; через резистор $2R$ ток нуль

Обратите внимание: показание амперметра — не ток резистора рядом с ним, а ток провода, в котором он стоит. Для A_2 это ток резистора $3R$, а не ток провода J–d и не нижнего резистора R.

Проверка. Размерность: U/R — В/Ом = А. Полный ток: $\dfrac{U}{R_1+R_2} = \dfrac{12}{17}\dfrac{U}{R} \approx 0{,}155$ А, и он же равен $\dfrac{8}{17}+\dfrac{4}{17}=\dfrac{12}{17}$ (левый участок) и $\dfrac{3}{17}+\dfrac{9}{17}=\dfrac{12}{17}$ (правый участок) в единицах U/R. Сходится.

Смысл: идеальные амперметры закорачивают резистор $2R$ и делят цепь на два независимых параллельных участка; амперметры просто показывают токи верхних резисторов R и $3R$.

Ответ. $I_{A_1} = \dfrac{8U}{17R} \approx 0{,}104$ А; $I_{A_2} = \dfrac{3U}{17R} \approx 0{,}039$ А.