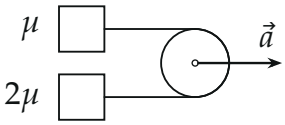
Бруски у движущегося блока

Задача 3. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 9 класс, задача 3] На шероховатой горизонтальной поверхности покоятся два бруска с одинаковой массой m. Коэффициенты трения брусков о поверхность равны μ и 2μ. К брускам привязана верёвка, которая переброшена через лёгкий горизонтально расположенный блок (см. рисунок; вид сверху). Какое минимальное горизонтальное ускорение $\vec{a}$ нужно сообщить блоку, чтобы оба бруска стронулись с места?



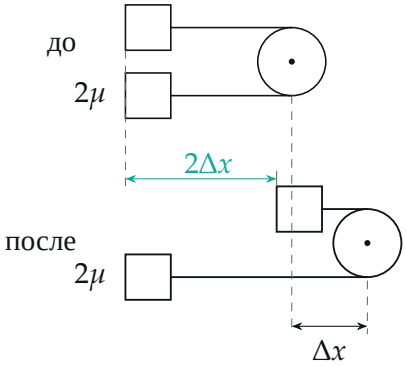
▲ **Решение. Что происходит.** Блок тянут вправо с ускорением a, верёвка натянута одинаково по всей длине (верёвка и блок лёгкие). Сила натяжения T тянет оба бруска вправо, трение удерживает. Удержать можно не оба: блок едет, верёвка нерастяжима, значит, хотя бы один брусок обязан двигаться. Сначала поедет тот, у кого меньше трение, и он будет двигаться вдвое быстрее блока. Чем больше a, тем больше нужно натяжение, чтобы разгонять его; когда T дорастёт до предельного трения покоя второго бруска $2\mu mg$, стронется и он. Класс задачи — связанные тела с трением покоя: предположение о режиме, кинематическая связь, проверка.

Обозначения. Ось x — вдоль $\vec{a}$ (по направлению верёвок к блоку). $x_б$, x_1, x_2 — координаты блока и брусков с коэффициентами трения μ и 2μ; a_1, a_2 — их ускорения; T — натяжение верёвки. Вес бруска уравновешен реакцией опоры, $N = mg$, поэтому предельная сила трения покоя бруска «μ» равна μmg, бруска «2μ» — $2\mu mg$.

1. Связь перемещений. Верёвка нерастяжима: её длина — два горизонтальных куска и полуокружность на блоке — постоянна:

$$(x_б - x_1) + (x_б - x_2) + \pi R = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2\,\Delta x_б, \qquad a_1 + a_2 = 2a.$$

Если брусок «2μ» стоит ($a_2 = 0$), то брусок «μ» движется с ускорением $a_1 = 2a$: блок сдвинулся на Δx, со стороны стоящего бруска верёвке нужно лишнее Δx, и с другой стороны она укорачивается ещё на Δx.



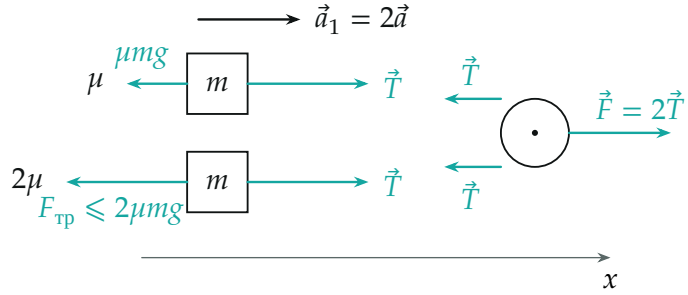
Брусок «2μ» стоит. Сверху — до, снизу — после: блок сместился на Δx, брусок «μ» — на $2\Delta x$

2. Кто поедет первым. Пусть брусок «2μ» стоит, а брусок «μ» скользит. Запишем второй закон Ньютона для бруска «μ» в проекции на ось x (на него вдоль оси действуют натяжение вправо и трение скольжения влево):

$$ma_1 = T - \mu mg, \qquad a_1 = 2a \quad \Rightarrow \quad T = \mu mg + 2ma.$$

Брусок «2μ» при этом действительно может стоять, пока натяжение не больше предельного трения покоя: $T \leqslant 2\mu mg$.

Обратите внимание: обратный вариант (стоит брусок «μ», едет «2μ») невозможен. Тогда $T = 2\mu mg + 2ma > \mu mg$, и стоящий брусок «$\mu$» не удержало бы трение. Покоиться оба бруска тоже не могут: блок едет, и верёвка тянет хотя бы один из них.



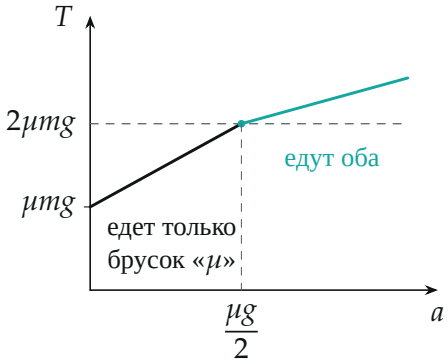
Силы вдоль оси x (вид сверху): на брусок «μ» — натяжение и трение скольжения, на брусок «2μ» — натяжение и трение покоя. Блок лёгкий, поэтому тянущая его сила $F = 2T$

3. Когда стронется второй брусок. Трение покоя бруска «2μ» не может превысить $2\mu mg$. Брусок стронется, когда натяжение дойдёт до этого значения:

$$T = \mu mg + 2ma \geqslant 2\mu mg \quad \Rightarrow \quad a \geqslant \frac{\mu g}{2}.$$

Значит, при $a < \mu g/2$ едет только брусок «μ», а начиная с $a_{\min} = \mu g/2$ — оба.

4. Что дальше (проверка непрерывности). При $a > \mu g/2$ оба бруска скользят: $ma_1 = T - \mu mg$, $ma_2 = T - 2\mu mg$, $a_1 + a_2 = 2a$. Отсюда $a_1 - a_2 = \mu g$ и $T = \frac{3}{2}\mu mg + ma$. При $a = \mu g/2$ обе формулы для T дают $2\mu mg$ — режимы сшиваются без скачка, так что граница найдена верно.



Натяжение верёвки от ускорения блока: $T = \mu mg + 2ma$, пока стоит брусок «2μ», и $T = \frac{3}{2}\mu mg + ma$, когда скользят оба. Излом — в точке $a = \mu g/2$, $T = 2\mu mg$

Проверка. Размерность: μg — ускорение. Предел: при $\mu \to 0$ трения нет, и оба бруска сдвинутся при любом ускорении, $a_{\min} \to 0$. Второй способ через силу на блок: блок лёгкий, тянущая сила $F = 2T$; брусок «2μ» стронется при $F = 4\mu mg$, а брусок «μ» при этом разгоняется силой $T - \mu mg = \mu mg$, то есть с ускорением $\mu g = 2a$, откуда снова $a = \mu g/2$.

Смысл: ускорение блока нужно не для того, чтобы преодолеть трение, а для того, чтобы «лёгкий» брусок, разгоняясь вдвое быстрее блока, требовал от верёвки натяжения $2\mu mg$.

Ответ. $a_{\min} = \dfrac{\mu g}{2}$.