Нагрев проводника после укорочения

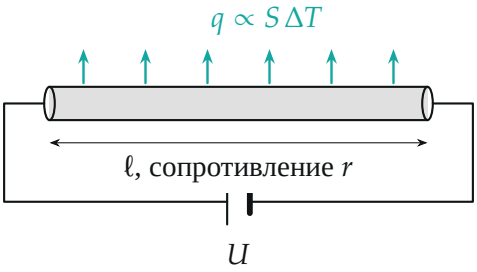
Задача 4. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 9 класс, задача 4] В результате протекания по цилиндрическому проводнику электрического тока температура проводника увеличилась на $\Delta T = 10$ °C по сравнению с температурой окружающей среды и далее не увеличивалась. Затем проводник отключили от источника, отрезали $1/10$ часть его длины и подключили к тому же источнику напряжения. Насколько в этот раз его температура будет превышать температуру окружающей среды? Считать, что удельное сопротивление проводника не зависит от температуры в рассматриваемых интервалах изменения температур.

▲ **Решение. Что происходит.** Ток греет проводник, а проводник отдаёт тепло воздуху через поверхность. Температура перестаёт расти, когда наступает тепловой баланс: мощность тепловыделения (закон Джоуля — Ленца) равна мощности теплоотдачи. Теплоотдача пропорциональна перегреву ΔT и площади боковой поверхности S (закон Ньютона для теплообмена; торцы малы по сравнению с боковой поверхностью длинного проводника). Укорачивая проводник, мы уменьшаем сопротивление — при том же напряжении тепловыделение растёт, — и одновременно уменьшаем поверхность, через которую уходит тепло. Оба эффекта повышают перегрев. Класс задачи: стационарный тепловой режим.

Обозначения. ℓ — длина проводника, r — его сопротивление, S — площадь боковой поверхности, U — напряжение источника, β — коэффициент теплоотдачи (мощность, уходящая с единицы площади при перегреве на 1 °C), $\Delta T'$ — искомый перегрев.

1. Тепловой баланс до укорочения. Мощность тепловыделения при напряжении U — $\dfrac{U^2}{r}$, мощность теплоотдачи — $\beta S\,\Delta T$:

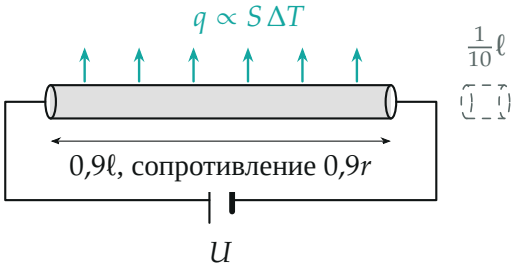
$$\frac{U^2}{r} = \beta S\,\Delta T.$$



Проводник длины ℓ под напряжением U: тепло уходит через боковую поверхность

2. Что меняется при укорочении. Сопротивление цилиндрического проводника $r = \rho\frac{\ell}{s}$ пропорционально длине (сечение s и удельное сопротивление ρ те же), площадь боковой поверхности $S = 2\pi a\ell$ (a — радиус) — тоже. После того как отрезали $\frac{1}{10}$ длины:

$$r' = 0{,}9\,r, \qquad S' = 0{,}9\,S.$$



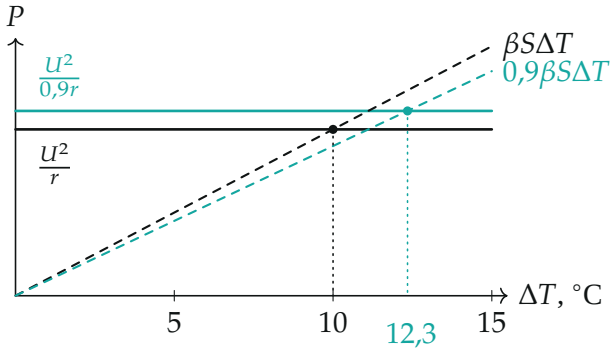
Укороченный проводник (отрезанная часть — пунктиром) подключён к тому же источнику

3. Тепловой баланс после укорочения (напряжение то же):

$$\frac{U^2}{0{,}9\,r} = \beta \cdot 0{,}9\,S \cdot \Delta T'.$$

Делим это равенство на равенство п. 1 — U, r, β, S сокращаются:

$$\frac{1}{0{,}9} = 0{,}9\,\frac{\Delta T'}{\Delta T} \quad \Rightarrow \quad \Delta T' = \frac{\Delta T}{0{,}81} = \frac{100}{81}\,\Delta T \approx 12{,}3\ ^\circ\text{C}.$$

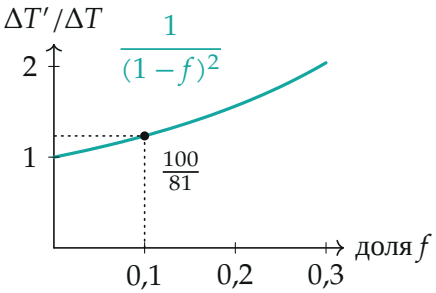


Тепловой баланс: перегрев — точка, где тепловыделение (горизонталь) равно теплоотдаче (луч). После укорочения горизонталь выше, луч положе

4. Зависимость от того, сколько отрезали. Если отрезать долю f длины, то $r' = (1-f)\,r$, $S' = (1-f)\,S$, и

$$\Delta T' = \frac{\Delta T}{(1-f)^2}.$$

При $f = 0{,}1$ это $\dfrac{100}{81}\Delta T$; квадрат возникает потому, что работают сразу оба эффекта — больше тепла и меньше поверхность.



Во сколько раз растёт перегрев, если отрезать долю f длины

Обратите внимание: при том же *напряжении* короткий проводник греется сильнее, а не слабее: ток $\dfrac{U}{0{,}9r}$ вырос. Если бы тот же был *ток*, тепловыделение I^2r упало бы в $0{,}9$ раза вместе с поверхностью, и перегрев не изменился бы.

Проверка. Размерность: в формуле $\Delta T' = \Delta T/(1-f)^2$ множитель безразмерный, ответ в градусах. Предел $f \to 0$: $\Delta T' \to \Delta T$, проводник не изменился. Второй способ: мощность на единицу площади $\dfrac{U^2}{rS} \propto \dfrac{1}{\ell^2}$, а перегрев пропорционален именно ей; $\ell \to 0{,}9\ell$ даёт множитель $\dfrac{1}{0{,}81}$. Число: $10/0{,}81 = 12{,}35 \approx 12{,}3$ °C.

Смысл: укороченный проводник при том же напряжении выделяет больше тепла с меньшей поверхности, поэтому перегрев растёт как квадрат отношения длин.

Ответ. $\Delta T' = \dfrac{100}{81}\,\Delta T \approx 12{,}3$ °C.