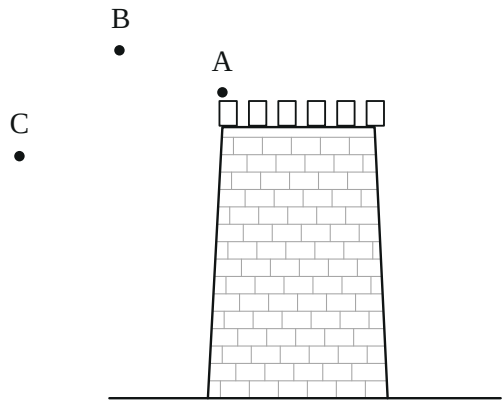
Построение положения брошенного тела

Задача 5. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 9 класс, задача 5] С высокой башни под некоторым углом к горизонту бросили тело. Известны положения тела через интервалы времени τ и 2τ после броска (см. рисунок; эти положения отмечены точками B и C). Известно также положение точки, откуда бросили тело (точка A). С помощью построения найти положение тела спустя интервал времени 3τ после броска. Считать, что в этот момент тело еще не упало на землю. Построение обосновать.



▲ **Решение. Что происходит.** Тело летит с постоянным ускорением $\vec{g}$, и его перемещение из точки броска складывается из двух векторов: равномерного движения со скоростью $\vec{v}_0$ (растёт как t) и свободного падения (растёт как t^2). Два известных положения B и C дают два векторных уравнения — из них находим оба неизвестных вектора, не зная ни v_0, ни угла, ни g, ни τ. Затем записываем перемещение за 3τ и выражаем его через данные отрезки. Класс задачи: кинематика с постоянным ускорением в векторной форме, построение.

Обозначения. Перемещение тела из точки A за время t:

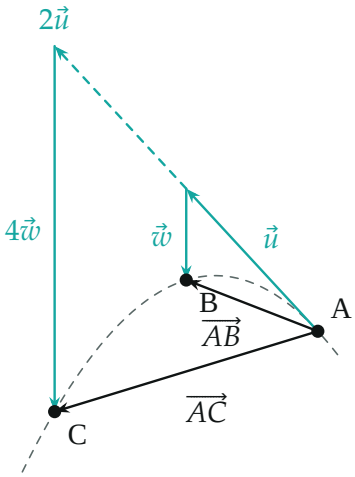
$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Обозначим $\vec{u} = \vec{v}_0\tau$ (перемещение за τ «по инерции») и $\vec{w} = \dfrac{\vec{g}\tau^2}{2}$ (смещение свободного падения за τ, направлено вертикально вниз). D — искомое положение в момент 3τ.

1. Перемещения в моменты τ и 2τ (подставляем $t = \tau$ и $t = 2\tau$):

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{w}, \qquad \overrightarrow{AC} = 2\vec{u} + 4\vec{w}.$$

Падение растёт как t^2: за 2τ тело «провалилось» на $4\vec{w}$, а не на $2\vec{w}$.



Каждое перемещение — сумма равномерного движения ($\vec{u}$, $2\vec{u}$) и свободного падения ($\vec{w}$, $4\vec{w}$) вниз; пунктир — траектория

2. Находим $\vec{u}$ и $\vec{w}$ из этих двух уравнений:

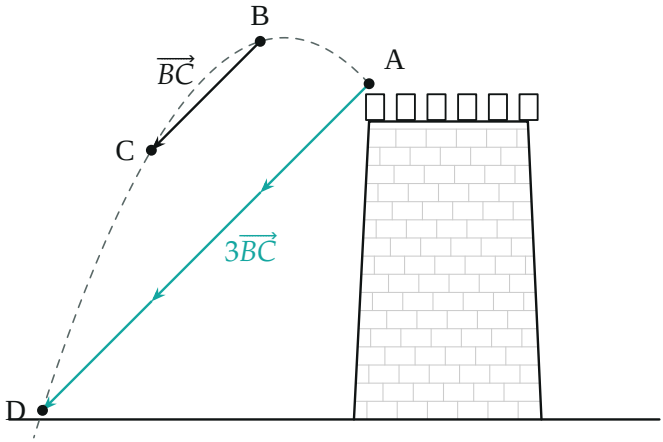
$$\vec{w} = \frac{\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}}{2}, \qquad \vec{u} = \overrightarrow{AB} - \vec{w} = \frac{4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}{2}.$$

3. Перемещение за 3τ:

$$\overrightarrow{AD} = 3\vec{u} + 9\vec{w} = \frac{12\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{9\overrightarrow{AC} - 18\overrightarrow{AB}}{2} = 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{BC}.$$

4. Построение. Соединяем B и C — получаем вектор $\overrightarrow{BC}$ (от B к C). Откладываем от точки A три раза подряд вектор, равный $\overrightarrow{BC}$ (циркулем

переносим длину, линейкой — параллельно BC: через A проводим прямую, параллельную BC, и откладываем на ней три отрезка длины BC в сторону от B к C). Конец третьего отрезка — искомая точка D.



Построение: от точки броска A откладываем $3\overrightarrow{BC}$ и получаем D

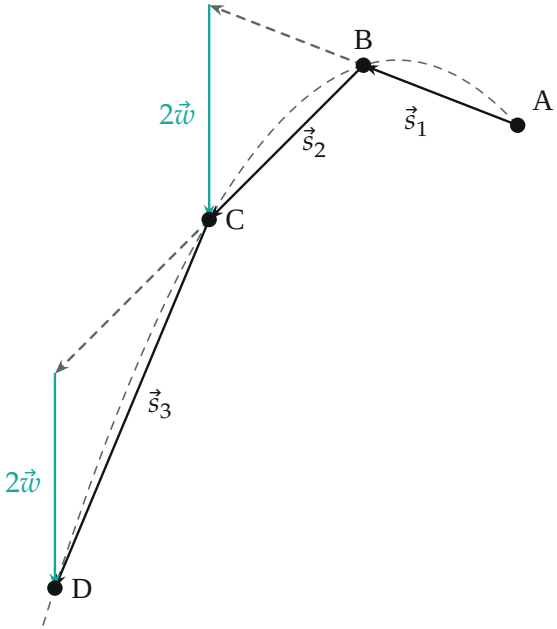
5. Второй способ: перемещения за равные интервалы. Перемещения за первый, второй и третий интервалы τ:

$$\vec{s}_1 = \overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{w}, \quad \vec{s}_2 = \overrightarrow{BC} = \vec{u} + 3\vec{w}, \quad \vec{s}_3 = \overrightarrow{CD} = \vec{u} + 5\vec{w}.$$

Каждое следующее больше предыдущего на один и тот же вектор $2\vec{w} = \vec{g}\tau^2$ (как в равноускоренном движении по прямой пути относятся $1 : 3 : 5$). Поэтому $\vec{s}_3 = 2\vec{s}_2 - \vec{s}_1$, и

$$\overrightarrow{AD} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 = 3\vec{s}_2 = 3\,\overrightarrow{BC}.$$

Тот же ответ.



Перемещения за равные интервалы τ: каждое следующее получается из предыдущего добавлением одного и того же вектора $2\vec{w} = \vec{g}\tau^2$ вниз

Обратите внимание: построение не требует знать ни направление вертикали, ни масштаб — только три данные точки. При этом точки на рисунке согласованы: вычисленный по ним вектор $\vec{w} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB})$ направлен почти точно вниз, как и должно быть у $\vec{g}$.

Проверка. Подстановка: $3\overrightarrow{BC} = 3(\vec{u} + 3\vec{w}) = 3\vec{u} + 9\vec{w} = \vec{r}(3\tau)$ — совпадает с законом движения. Частный случай: тело брошено в невесомости ($\vec{w} = 0$) — точки A, B, C, D на одной прямой через равные отрезки, и $AD = 3AB = 3BC$, как и даёт формула.

Смысл: при движении с постоянным ускорением перемещение за 3τ втрое больше перемещения за второй интервал τ — средний из трёх интервалов «представляет» всё движение.

Ответ. Положение тела в момент 3τ — точка D, для которой $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$: вектор $\overrightarrow{BC}$ утраивают и откладывают от точки A.