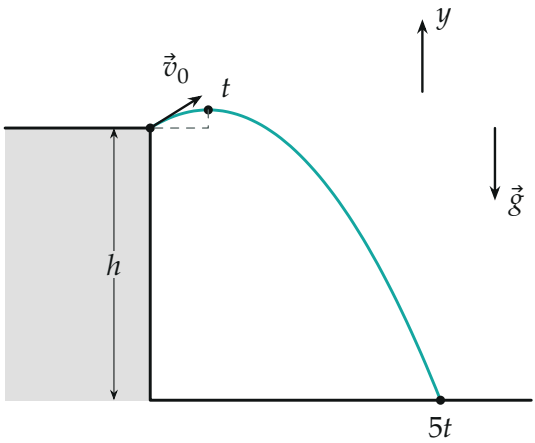
Бросок с края ступеньки

Задача 1. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 9 класс, задача 1] Тело бросили под углом к горизонту с края ступеньки. Известно, что максимальной высоты тело достигло через время $t = 0{,}5$ с после броска, а через время $5t$ упало на землю. Найти высоту ступеньки. $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: бросок с края ступеньки высотой h; ось y — вверх

▲ **Решение. Что происходит.** После броска на тело действует только сила тяжести, ускорение $\vec{g}$ постоянно и направлено вниз. Горизонтальное движение равномерное и на высоту не влияет, поэтому следим только за вертикальной координатой: равнозамедленный подъём, затем падение. Время подъёма даёт начальную вертикальную скорость, а время полёта — уравнение для высоты. Класс задачи: движение тела, брошенного под углом, с начальной высотой.

Обозначения. Ось y направлена вертикально вверх, начало отсчёта — на земле; v_{0y} — проекция начальной скорости на ось y; h — высота ступеньки; $T = 5t$ — время полёта.

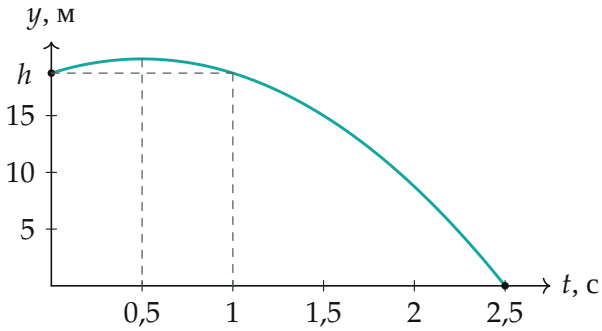
1. Подъём (кинематика равноускоренного движения в проекции на ось y). Скорость $v_y = v_{0y} - gt'$ убывает; в верхней точке вертикальная скорость равна нулю, и это происходит в момент $t' = t$:

$$0 = v_{0y} - gt \quad \Rightarrow \quad v_{0y} = gt.$$

2. Падение на землю. Координата $y(t') = h + v_{0y}t' - \dfrac{gt'^2}{2}$; в момент $T = 5t$ тело на земле, $y = 0$:

$$0 = h + gt \cdot 5t - \frac{g(5t)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{25}{2}gt^2 - 5gt^2 = \frac{15}{2}gt^2.$$

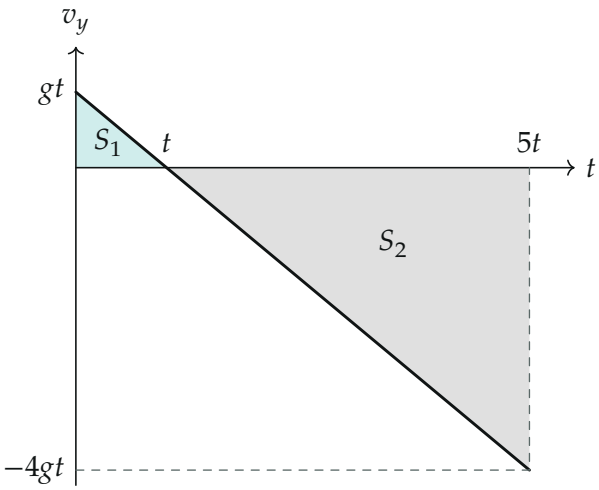
Число: $h = 7{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}25$ м $= 18{,}75$ м $\approx 18{,}8$ м.



Высота тела над землёй $y(t)$ при $t = 0{,}5$ с: подъём до t, возврат на уровень ступеньки в $2t$, падение в $5t = 2{,}5$ с

3. Второй способ: площадь под графиком $v_y(t)$. Проекция скорости убывает линейно от gt до $-4gt$ (в момент $5t$). Перемещение по вертикали — площадь под графиком со знаком: треугольник над осью $S_1 = \dfrac{1}{2}gt \cdot t$, под осью $S_2 = \dfrac{1}{2}4gt \cdot 4t = 8gt^2$. Тело опустилось на

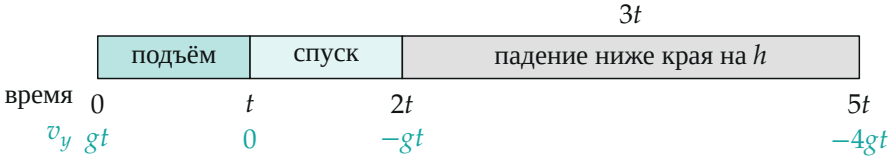
$$h = S_2 - S_1 = 8gt^2 - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{15}{2}gt^2.$$



Проекция скорости на вертикаль; перемещение вниз равно разности площадей $S_2 - S_1$

4. Третий способ: симметрия полёта. Подъём длится t, и столько же длится спуск до уровня края ступеньки: в момент $2t$ тело снова на высоте h и летит вниз со скоростью gt (по вертикали). Остаётся $5t - 2t = 3t$, за которые оно проходит всю высоту ступеньки:

$$h = gt \cdot 3t + \frac{g(3t)^2}{2} = 3gt^2 + \frac{9}{2}gt^2 = \frac{15}{2}gt^2.$$



Этапы полёта по времени и проекция скорости v_y на их границах: последние $3t$ тело проходит высоту ступеньки, начиная со скорости gt вниз

Обратите внимание: угол броска и начальная скорость не нужны. Горизонтальная составляющая скорости не влияет на вертикальное движение, а вертикальную находим из времени подъёма.

Проверка. Размерность: $[gt^2] = \text{м/с}^2 \cdot \text{с}^2 = \text{м}$. Все три способа дают $\frac{15}{2}gt^2$. Предел: если бы тело упало через $2t$, высота была бы $\frac{g}{2}(4t^2) - gt \cdot 2t = 0$ — бросок с земли, ступеньки нет. Здесь $5t > 2t$, ступенька есть.

Смысл: из полутора секунд падения после возврата на уровень края ($3t$) и известной скорости gt высота получается сразу — время подъёма служит «часами», по которым узнаём вертикальную скорость.

Ответ. $h = \dfrac{15}{2}gt^2 = 18{,}75$ м $\approx 18{,}8$ м.