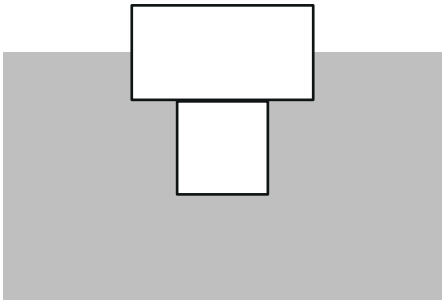
Стакан из двух цилиндров на воде

Задача 3. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 9 класс, задача 3] Имеется стакан, составленный из двух цилиндрических частей: узкой с дном, и открытой с радиусом вдвое большим радиуса узкой части. Высота частей стакана одинакова. Стакан опускают в воду вниз дном, и он погружается на половину высоты широкой части и далее остаётся в таком положении (см. рисунок). Какой максимальный объём воды можно налить в стакан, чтобы он не затонул. Объём стакана V. Считать, что стенки стакана очень тонкие.



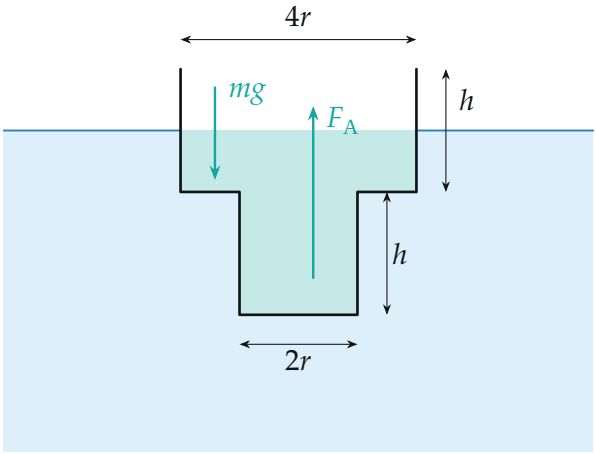
▲ **Решение.** **Что происходит.** Плавающий стакан в равновесии: сила тяжести уравновешена силой Архимеда. Если налить в стакан воду, то налитая вода внутри стакана сама «держит себя»: её вес уравновешен выталкивающей силой того объёма, который она занимает под уровнем внешней воды. Поэтому стакан с водой плавает так, что *незаполненная* водой подводная часть стакана всегда та же, что у пустого стакана. Стакан ещё не тонет, пока края над водой; в предельном случае внешняя вода доходит до края, а незаполненная часть по-прежнему того же объёма. Класс задачи: плавание тел, закон Архимеда.

Обозначения. r — радиус узкой части, $2r$ — широкой, h — высота каждой части, ρ — плотность воды, m — масса стакана, V_1 — искомый объём воды. Объём стакана

$$V = \pi r^2 h + \pi (2r)^2 h = 5\pi r^2 h.$$

1. Пустой стакан (условие плавания: сила тяжести равна силе Архимеда). Под водой — вся узкая часть и половина широкой (на рисунке выделено):

$$V_{\text{погр}} = \pi r^2 h + 4\pi r^2 \cdot \frac{h}{2} = 3\pi r^2 h, \qquad mg = \rho g \cdot 3\pi r^2 h.$$

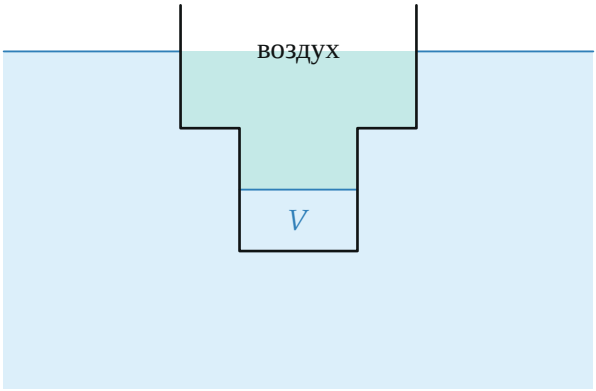


Пустой стакан: силы и погружённый объём $3\pi r^2 h$ (выделен)

2. Стакан с водой (условие плавания системы «стакан + налитая вода»). Пусть налит объём воды $V_{\text{в}}$ массой $\rho V_{\text{в}}$, а под внешним уровнем оказался объём стакана $V'_{\text{погр}}$. Сила Архимеда держит и стакан, и воду в нём:

$$mg + \rho V_{\text{в}} g = \rho g V'_{\text{погр}} \quad \Rightarrow \quad V'_{\text{погр}} - V_{\text{в}} = \frac{m}{\rho} = 3\pi r^2 h.$$

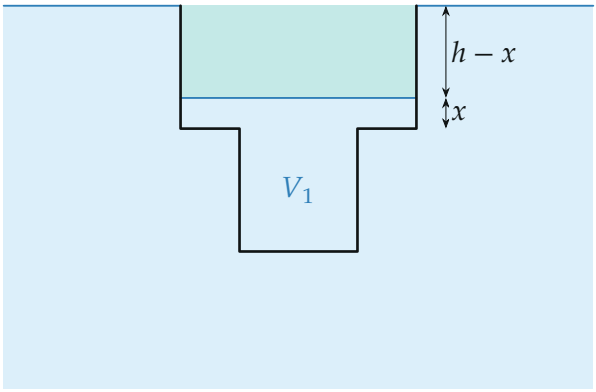
Слева — объём той части стакана, что под внешним уровнем воды, но не занята водой (воздух). Он не зависит от того, сколько налито: стакан всегда погружается так, чтобы «воздушная» подводная часть равнялась $3\pi r^2 h$.



В стакан налита вода V: стакан погрузился глубже, но объём воздуха под внешним уровнем (выделен) снова $3\pi r^2 h$

3. Предельный случай. Больше всего воды можно налить, пока внешний уровень не дошёл до края стакана: дальше вода перельётся через край, и стакан утонет. Тогда воздух занимает верхнюю часть широкого цилиндра от поверхности налитой воды до края. Узкая часть залита полностью (её объём $\pi r^2 h < 3\pi r^2 h$ — воздуху там не уместиться), а в широкой вода стоит на высоте x:

$$4\pi r^2 (h - x) = 3\pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h - x = \frac{3}{4}h, \qquad x = \frac{h}{4}.$$



Предельный случай: края стакана на уровне воды, воздух (выделен) — верхние $\frac{3}{4}h$ широкой части

4. Максимальный объём воды:

$$V_1 = \pi r^2 h + 4\pi r^2 \cdot \frac{h}{4} = 2\pi r^2 h = \frac{2}{5} \cdot 5\pi r^2 h = \frac{2}{5} V.$$

Обратите внимание: в предельном случае уровень воды внутри стакана ниже внешнего на $\frac{3}{4}h$, а не совпадает с ним: стакан держится на плаву именно за счёт этого воздуха под водой.

Проверка. Размерность: V_1 — доля объёма V. Второй способ, через силы в предельном случае: под водой весь стакан, $F_\text{A} = \rho g \cdot 5\pi r^2 h$; вес стакана и воды $\rho g(3\pi r^2 h + V_1)$; равенство даёт $V_1 = 2\pi r^2 h = \frac{2}{5}V$. Здравый смысл: пустой стакан погружён на $\frac{3}{5}$ своего объёма, до полного погружения остаётся $\frac{2}{5}V$ — ровно столько воды и можно налить.

Смысл: запас плавучести стакана — его надводный объём $\frac{2}{5}V$; налитая вода тратит этот запас кубометр в кубометр.

Ответ. $V_1 = \frac{2}{5} V.$