Незнайка едет в Солнечный город

Задача 4. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 9 класс, площадка 2, задача 4] Незнайка поехал на автомобиле из Цветочного города в Солнечный город. По дороге между ними находится деревня Простоквашино. Через время t_1 после выезда расстояние от Незнайки до Простоквашино оказалось вдвое большим того расстояния, которое он проехал. Когда после этого Незнайка проехал ещё расстояние x, расстояние от Незнайки до Солнечного города оказалось вдвое большим расстояния от него до Простоквашино. Через время t_2 после этого Незнайка приехал в Солнечный город. Найти скорость автомобиля, считая её постоянной.



Поясняющий рисунок: дорога из Цветочного города в Солнечный через Простоквашино

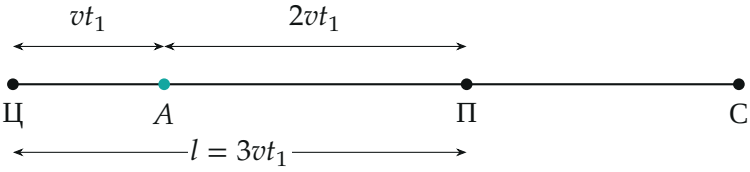
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равномерное движение: каждое расстояние в условии — это «скорость × время» или разность координат на одной прямой. Ловушка в слове «расстояние»: во второй момент Незнайка мог уже проехать Простоквашино, а мог ещё не доехать до него, — условие допускает оба положения, и ответов будет два.

Обозначения. Ось X — вдоль дороги, начало в Цветочном городе. v — скорость автомобиля, l — координата Простоквашино, L — координата Солнечного города. Положение Незнайки в момент t_1 — точка A, через ещё расстояние x — точка B.

1. Момент t_1: где Простоквашино. К моменту t_1 Незнайка проехал vt_1 и ещё не доехал до деревни (иначе расстояние до неё было бы меньше пройденного, а не вдвое больше). Расстояние до деревни $l - vt_1$, и по условию

$$l - vt_1 = 2vt_1 \quad \Rightarrow \quad l = 3vt_1.$$

Простоквашино стоит на расстоянии трёх «отрезков» vt_1 от старта.

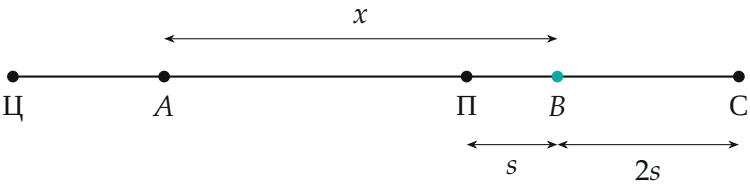


Момент t_1: Незнайка в точке A, до деревни вдвое дальше, чем пройдено

2. Точка B: два возможных положения. В точке B координата Незнайки $vt_1 + x$, расстояние до Солнечного города $L - (vt_1 + x)$. Расстояние до Простоквашино — модуль разности координат, поэтому рассмотрим оба случая.

Случай 1: деревня уже позади ($vt_1 + x > l$). Расстояние до деревни $vt_1 + x - l = x - 2vt_1$, и

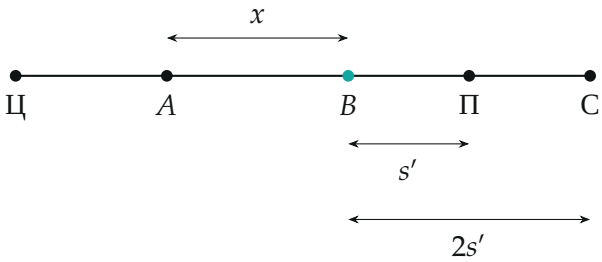
$$L - vt_1 - x = 2(x - 2vt_1) \quad \Rightarrow \quad L = 3x - 3vt_1.$$



Случай 1: в точке B деревня позади; $s = x - 2vt_1$ (в масштабе $vt_1 = 1$, $x = 2{,}6$)

Случай 2: деревня ещё впереди ($vt_1 + x < l$). Расстояние до деревни $l - vt_1 - x = 2vt_1 - x$, и

$$L - vt_1 - x = 2(2vt_1 - x) \quad \Rightarrow \quad L = 5vt_1 - x.$$



Случай 2: деревня ещё впереди; $s' = 2vt_1 - x$ (в масштабе $vt_1 = 1$, $x = 1{,}2$)

3. Последний участок. От точки B до Солнечного города Незнайка едет время t_2 с той же скоростью:

$$L = vt_1 + x + vt_2.$$

4. Скорость. Приравниваем два выражения для L.

Случай 1: $vt_1 + x + vt_2 = 3x - 3vt_1$, откуда $v(4t_1 + t_2) = 2x$ и

$$v_1 = \frac{2x}{4t_1 + t_2}.$$

Проверим, что деревня действительно позади: нужно $x > 2vt_1$, то есть $x > \dfrac{4xt_1}{4t_1 + t_2}$, — верно при любом $t_2 > 0$. Этот случай возможен всегда.

Случай 2: $vt_1 + x + vt_2 = 5vt_1 - x$, откуда $v(4t_1 - t_2) = 2x$ и

$$v_2 = \frac{2x}{4t_1 - t_2}.$$

Скорость положительна только при $4t_1 > t_2$. Условие «деревня впереди» $x < 2vt_1 = \dfrac{4xt_1}{4t_1 - t_2}$ при этом выполнено автоматически.

Обратите внимание: «расстояние до деревни» не знает, с какой стороны деревня. Кто запишет только $vt_1 + x - l$, потеряет второй ответ.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ — верно. Предел $t_2 \ll t_1$: оба ответа сходятся к $\dfrac{x}{2t_1}$, то есть $x \approx 2vt_1$ — точка B почти в самой деревне, и разница между «деревня позади» и «деревня впереди» исчезает.

Смысл: одно и то же словесное условие описывает две разные картины на дороге, и каждая даёт свою скорость.

Ответ. $v_1 = \dfrac{2x}{4t_1 + t_2}$ (деревня осталась позади) или $v_2 = \dfrac{2x}{4t_1 - t_2}$ (деревня впереди, при $4t_1 > t_2$).