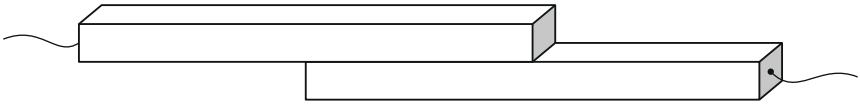
Два прижатых стержня

Задача 1. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 9 класс, площадка 3, задача 1] Два очень тонких и очень длинных проводящих стержня прямоугольного сечения имеют одинаковые размеры. Удельное сопротивление материала одного стержня вдвое меньше удельного сопротивления материала второго. Стержни плотно прижимают друг к другу боковой стороной так, что прижатыми оказываются две третьих длины стержней. Стержни включаются в электрическую цепь своими неперекрытыми торцами (см. рисунок). Найти сопротивление системы стержней, если сопротивление стержня с меньшим сопротивлением $R = 10$ Ом.



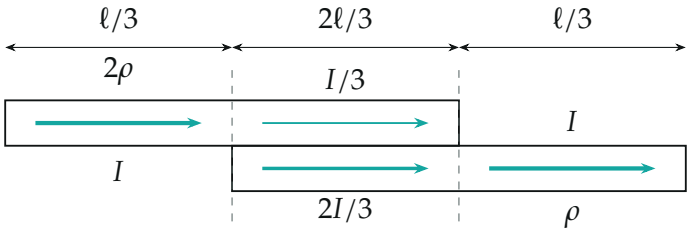
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на сведение распределённой цепи к схеме из резисторов. Ключевая мысль: стержни тонкие, поэтому в каждом поперечном сечении области контакта потенциалы двух стержней одинаковы. Тогда в области контакта стержни работают как два параллельных резистора, а неперекрытые трети — как резисторы, включённые последовательно.

Обозначения. ℓ — длина стержня, S — площадь сечения; у одного стержня удельное сопротивление ρ (его сопротивление $R = \rho\ell/S$), у другого 2ρ (сопротивление $2R$). I — ток в цепи, x — координата вдоль стержней.

1. Почему ток не перетекает через бока в середине контакта. Возьмём сечение области контакта с координатой x. Стержни тонкие, поэтому поперёк них напряжение не падает: потенциал верхнего и нижнего стержней в этом сечении один и тот же, $\varphi(x)$. Значит, напряжённость поля $E = -\Delta\varphi/\Delta x$ вдоль обоих стержней одинакова, и по закону Ома для участка в каждом стержне течёт ток, пропорциональный его проводимости:

$$I_\rho = \frac{ES}{\rho}, \qquad I_{2\rho} = \frac{ES}{2\rho}, \qquad I_\rho = 2I_{2\rho}.$$

Отношение токов во всей области контакта одно и то же, поэтому через боковую поверхность ток переходит только у краёв контакта, на длине порядка толщины стержня. Для тонких стержней эту длину не учитываем.

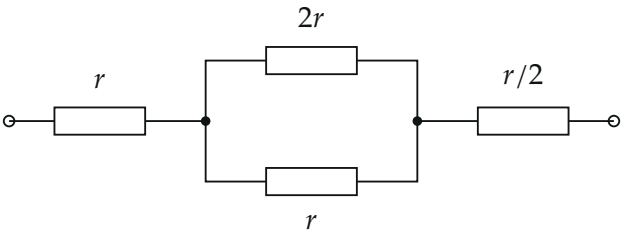


Вид сбоку: в области контакта ток делится в отношении 2 : 1, *перетекание — только у краёв контакта*

2. Сопротивления кусков. Сопротивление куска пропорционально его длине. Обозначим r сопротивление трети стержня с удельным сопротивлением 2ρ: $r = \dfrac{2R}{3}$. Тогда

треть стержня 2ρ (вне контакта) :	r,
две трети стержня 2ρ (в контакте) :	$2r$,
две трети стержня ρ (в контакте) :	r,
треть стержня ρ (вне контакта) :	$r/2$.

Проверим: весь стержень ρ — это $r + \dfrac{r}{2} = \dfrac{3r}{2} = R$, верно.



Эквивалентная схема: средние куски соединены параллельно

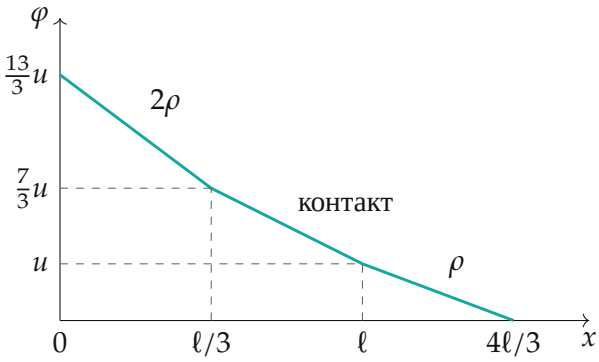
3. Сопротивление системы. Крайние куски включены последовательно, средние — параллельно (у них общие начало и конец по потенциалу):

$$R_{об} = r + \frac{2r\cdot r}{2r+r} + \frac{r}{2} = \frac{13}{6}r = \frac{13}{6}\cdot\frac{2R}{3} = \frac{13}{9}R \approx 14{,}4\ \text{Ом}.$$

Какой стержень лежит слева, неважно: при перестановке крайние куски r и $r/2$ меняются местами, сумма та же.

4. Второй способ — через потенциал. Пусть $u = \dfrac{I\rho\ell}{3S} = \dfrac{IR}{3}$ — падение напряжения на трети стержня ρ при токе I. Вне контакта слева весь ток идёт по стержню 2ρ: падение $2u$. В контакте удельное сопротивление пары — как у параллельных ρ и 2ρ, то есть $\dfrac{2\rho}{3}$, на длине двух третей падение $2\cdot\dfrac{2}{3}u = \dfrac{4}{3}u$. Справа ток идёт по стержню ρ: падение u. Всего

$$U = 2u + \frac{4}{3}u + u = \frac{13}{3}u = \frac{13}{9}IR, \qquad R_{об} = \frac{U}{I} = \frac{13}{9}R.$$



Потенциал вдоль системы (в масштабе): самый крутой спуск — на одиночном стержне 2ρ, самый пологий — в контакте

Обратите внимание: ток в области контакта не «перепрыгивает» в стержень с меньшим сопротивлением целиком — он делится обратно

пропорционально удельным сопротивлениям, потому что напряжённость поля в обоих стержнях одна.

Проверка. Пределы. Если контакт был бы по всей длине, система — два параллельных стержня, $\frac{2R \cdot R}{3R} = \frac{2}{3}R$; без контакта (касание в точке) — последовательно, $3R$. Наш ответ $\frac{13}{9}R \approx 1{,}44R$ лежит между ними. Числом: $\frac{13}{9} \cdot 10 = 14{,}4$ Ом.

Ответ. $R_{об} = \frac{13}{9}R \approx 14{,}4$ Ом.