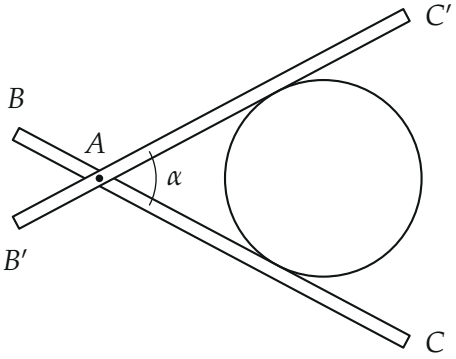
Заклинивание шайбы между стержнями

Задача 3. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 9 класс, площадка 3, задача 3] На горизонтальной поверхности между двумя одинаковыми стержнями BC и $B'C'$ находится шайба (см. рисунок; вид сверху). Стержни скреплены шарнирно в точке A. Концы стержней B и B' сжимают, перемещая шайбу по поверхности. При каком угле α между стержнями наступит заклинивание — шайба перестанет двигаться при любом усилии, прикладываемом к точкам B и B'? Коэффициент трения между стержнями и шайбой — μ, трение между шайбой и поверхностью отсутствует.

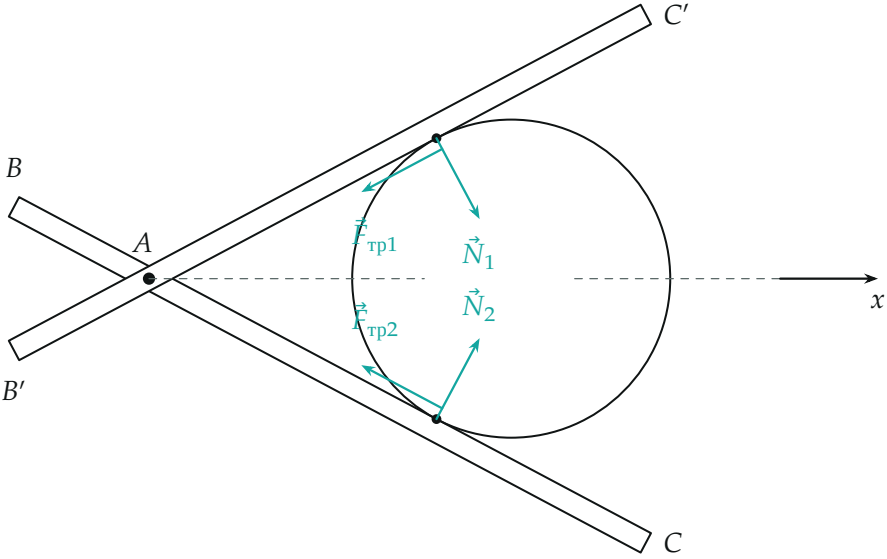


▲ **Решение. Что происходит.** Стержни — как ножницы: сводим концы B и B', угол α уменьшается, и стержни, давя на шайбу, выталкивают её от шарнира A вдоль биссектрисы угла. Скольжению шайбы вдоль стержней мешает трение, направленное к шарниру. Сила давления N зависит от того, как сильно мы сжимаем, и может быть сколь угодно большой, но максимальная сила трения μN растёт вместе с ней. Поэтому ответ — условие только на угол и коэффициент трения: сравниваем проекции на биссектрису силы давления и силы трения покоя в предельном случае. Класс задачи: заклинивание (самоторможение), трение покоя на пределе.

Обозначения. Ось x — по биссектрисе угла от шарнира к шайбе. $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — силы нормального давления стержней на шайбу, $\vec{F}_{\text{тр}1}$, $\vec{F}_{\text{тр}2}$ — силы трения стержней о шайбу. Трения о поверхность нет, сила тяжести

и реакция поверхности вертикальны и в горизонтальной плоскости ничего не дают.

1. Силы на шайбу. Сила давления стержня на шайбу перпендикулярна стержню и проходит через центр шайбы. Стержни симметричны относительно биссектрисы и сжимаются одинаково, поэтому $N_1 = N_2 = N$. Если шайба начнёт выскальзывать (двигаться по оси x от шарнира), она скользит вдоль обоих стержней от A, и сила трения на каждую точку касания направлена вдоль стержня к шарниру A.



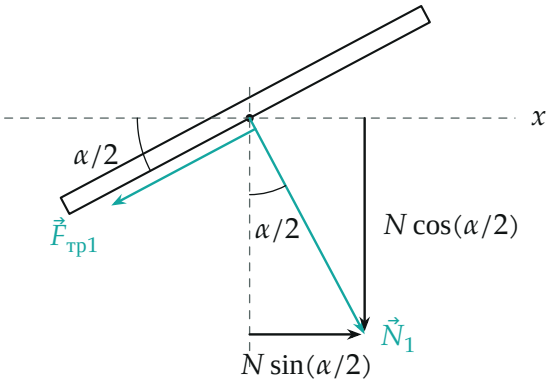
Силы, с которыми стержни действуют на шайбу (вид сверху); ось x — биссектриса угла

2. Проекции на биссектрису. Стержень наклонён к оси x под углом $\frac{\alpha}{2}$, а сила $\vec{N}_1$ перпендикулярна стержню, поэтому с осью y (поперёк биссектрисы) она образует тот же угол $\frac{\alpha}{2}$:

$$N_{1x} = N \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad F_{тр1,x} = -F_{тр1} \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Поперечные составляющие $N \cos\frac{\alpha}{2}$ от двух стержней равны и противо-

положны, они уравновешиваются (у трения — так же).



Разложение сил у верхней точки касания: угол между $\vec{N}_1$ и осью y равен углу между стержнем и осью x

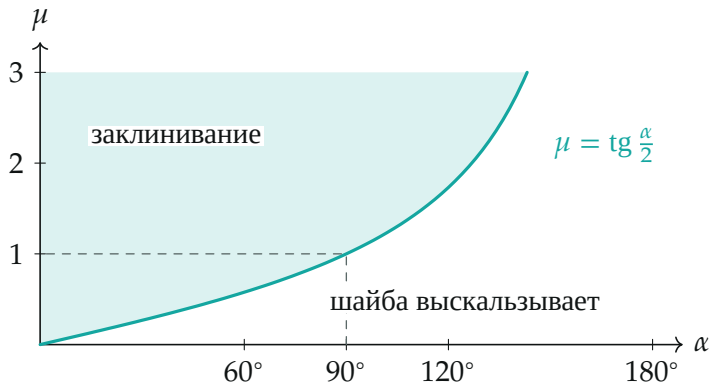
3. Условие заклинивания (второй закон Ньютона для шайбы в проекции на ось x). Шайба покоится, пока сумма проекций сил на ось x равна нулю при силах трения покоя, не превосходящих предела μN:

$$2N\sin\frac{\alpha}{2} - 2F_{тр}\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{тр} = N\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} \le \mu N.$$

Сила N сокращается: если $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} \le \mu$, трение покоя удерживает шайбу при *любом* сжатии — это и есть заклинивание. Если $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} > \mu$, даже максимального трения не хватает: проекция силы давления $2N\sin\dfrac{\alpha}{2}$ больше $2\mu N\cos\dfrac{\alpha}{2}$, и шайба выскальзывает.

Сводя стержни, мы уменьшаем угол: шайба едет, пока α больше граничного, и застревает, когда

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} \le \mu, \qquad \alpha \le 2\,\mathrm{arctg}\,\mu.$$



Граница заклинивания $\mu = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$: выше кривой шайба застревает при любом усилии

Обратите внимание: шайба не может выкатиться, вращаясь. Чтобы катиться без проскальзывания по обоим стержням от шарнира, она должна вращаться в разные стороны относительно верхнего и нижнего стержня, а это невозможно. Значит, движение шайбы возможно только со скольжением по стержням, и трение при этом — скольжения, μN на каждом.

Проверка. Размерность: μ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ безразмерны. Предельные случаи: без трения ($\mu = 0$) заклинивания нет ни при каком $\alpha > 0$ — шайбу всегда выдавит; при $\alpha \to 180°$ стержни на одной прямой, $\operatorname{tg} 90° = \infty$, давление направлено прямо вдоль x, и никакое конечное трение шайбу не удержит; при малом α стержни почти параллельны, давление почти поперёк, и даже малое трение держит. Число: при $\mu = 0{,}5$ заклинивание наступает при $\alpha \leq 2\operatorname{arctg} 0{,}5 \approx 53°$.

Смысл: это то же условие, что для бруска на наклонной плоскости ($\mu \geq \operatorname{tg}\varphi$), — клин с полууглом $\frac{\alpha}{2}$ самотормозится, когда тангенс полуугла не больше коэффициента трения.

Ответ. Заклинивание наступает при $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leq \mu$, то есть при $\alpha \leq 2\operatorname{arctg}\mu$.