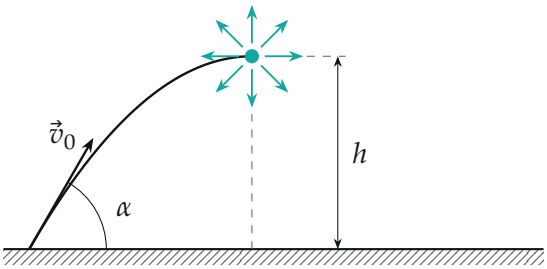
Осколки гранаты

Задача 4. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 9 класс, площадка 3, задача 4] Граната, брошенная с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, в верхней точке своей траектории разорвалась на множество осколков, которые в системе отсчёта, связанной с гранатой, летят во все стороны с одинаковыми скоростями. Известно, что осколки падали на землю в течение времени Δt. Через какое время после взрыва упал на землю самый первый осколок?



Поясняющий рисунок: взрыв в верхней точке, осколки разлетаются во все стороны

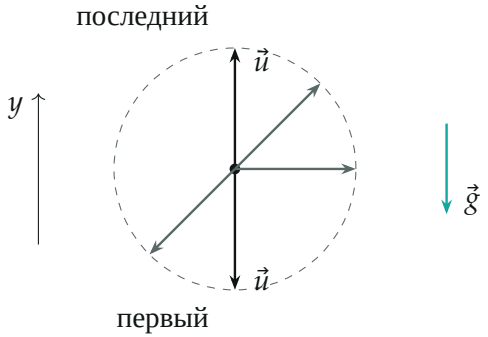
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на переход в движущуюся систему отсчёта. После взрыва на все осколки действует только сила тяжести, поэтому удобно смотреть из системы отсчёта, которая летит горизонтально со скоростью гранаты в верхней точке: в ней осколки разлетаются из одной точки с одной и той же скоростью u, а земля (горизонтальная плоскость) движется горизонтально и не приближается и не удаляется. Время падения по вертикали в обеих системах одно и то же.

Обозначения. Ось y — вертикально вверх, начало на земле. h — высота взрыва, u — скорость осколков относительно гранаты, t_1 — время падения первого осколка, t_2 — последнего.

1. Высота взрыва. В верхней точке вертикальная проекция скорости гранаты равна нулю. Запишем связь скорости и перемещения при равноускоренном движении в проекции на ось y от броска до верхней точки:

$$0 - v_0^2 \sin^2\alpha = -2gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

2. Какой осколок падает первым, какой последним. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся горизонтально со скоростью гранаты в верхней точке $v_0 \cos\alpha$. Она инерциальная, ускорение всех осколков в ней $\vec{g}$. Вертикальное движение осколка определяется только вертикальной проекцией его начальной скорости u_y, а она лежит в пределах от $-u$ до u. Чем больше u_y, тем дольше осколок летит. Первым падает осколок, брошенный вертикально вниз ($u_y = -u$), последним — вертикально вверх ($u_y = u$).



В системе отсчёта гранаты: скорости осколков одной длины u, первым падает летящий вниз, последним — вверх

3. Уравнения движения двух крайних осколков. Закон движения при равноускоренном движении в проекции на ось y; осколок упал, когда $y = 0$:

$$0 = h - ut_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \qquad 0 = h + ut_2 - \frac{gt_2^2}{2}.$$

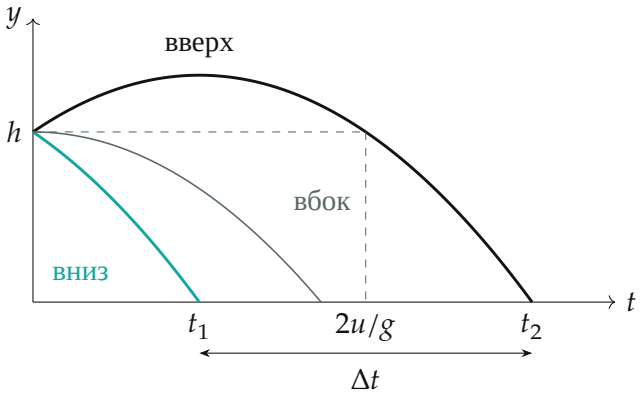
Положительные корни:

$$t_1 = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 2gh}}{g}, \qquad t_2 = \frac{u + \sqrt{u^2 + 2gh}}{g}.$$

4. Скорость разлёта из Δt. Осколки падали в течение времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta t = \frac{2u}{g} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{g\,\Delta t}{2}.$$

Тот же результат без вычислений: верхний осколок через время $\frac{u}{g}$ останавливается, ещё через $\frac{u}{g}$ возвращается к точке взрыва со скоростью u вниз — дальше он повторяет движение нижнего осколка. Значит, он опаздывает ровно на $\frac{2u}{g}$.

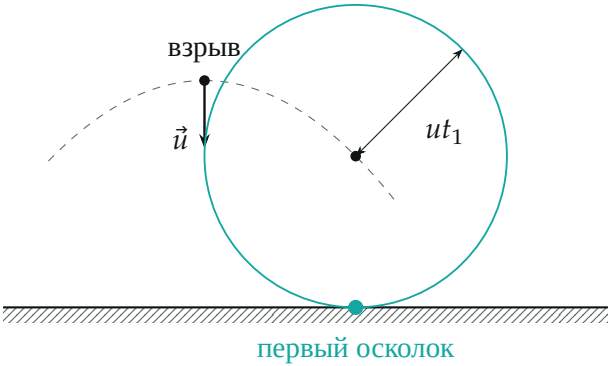


Высота осколков, брошенных вниз, вбок и вверх (в масштабе: $v_0 = 20$ м/с, $\alpha = 60°$, $\Delta t = 2$ с)

5. Время падения первого осколка. Подставим $u = \frac{g\Delta t}{2}$ и $2gh = v_0^2 \sin^2\alpha$ в формулу для t_1:

$$t_1 = \frac{-\frac{g\Delta t}{2} + \sqrt{\frac{g^2\Delta t^2}{4} + v_0^2 \sin^2\alpha}}{g} = \frac{\Delta t}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2\Delta t^2}} - 1\right).$$

Время — величина одинаковая во всех системах отсчёта, поэтому и для наблюдателя на земле первый осколок падает через это время.



В системе земли: «шар» осколков растёт со скоростью u, его центр летит по параболе; первый осколок — нижняя точка шара (в масштабе: момент $t_1 = 1$ с)

Обратите внимание: первым падает осколок, летящий *вертикально* вниз относительно гранаты, а не вниз-вперёд: горизонтальная скорость на время падения не влияет.

Проверка. Размерность: $\dfrac{v_0^2}{g^2\Delta t^2}$ безразмерно, t_1 в секундах. Пределы: при $\Delta t \to 0$ ($u \to 0$ — осколки не разлетаются) $t_1 \approx \dfrac{\Delta t}{2} \cdot \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g\Delta t} = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$ — время падения с высоты h без начальной вертикальной скорости, как у целой гранаты. Числа с рисунка: $v_0 = 20$ м/с, $\alpha = 60°$, $\Delta t = 2$ с дают $h = 15$ м, $u = 10$ м/с, $t_1 = \left(\sqrt{1+3} - 1\right) \cdot 1 = 1$ с, $t_2 = 3$ с, и правда $t_2 - t_1 = 2$ с.

Ответ. $t_1 = \dfrac{\Delta t}{2}\left(\sqrt{1 + \dfrac{4v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2\Delta t^2}} - 1\right)$.