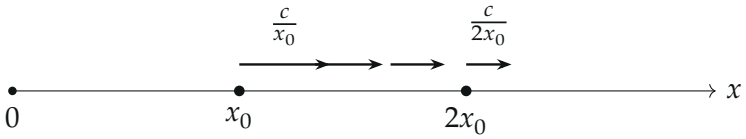
Скорость обратно пропорциональна координате

Задача 5. [Росатом 2019/20, заключительный этап, 9 класс, площадка 3, задача 5] Тело движется вдоль оси x из точки с координатой x ($x > 0$). Проекция скорости тела на ось x зависит от его координаты x по закону $v_x = c/x$, где $c > 0$ — известная постоянная. Через какое время тело окажется в точке с координатой $2x$?



Поясняющий рисунок: чем дальше тело, тем медленнее оно движется (стрелки — скорости в масштабе)

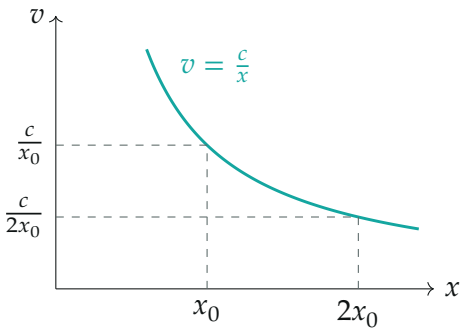
▲ **Решение. Что происходит.** Скорость тела зависит от координаты: в два раза дальше — в два раза медленнее. Движение неравномерное и не равноускоренное, поэтому формулы $s = vt$ и $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ здесь не работают. Класс задачи — «меняющаяся скорость»: разбиваем путь на малые участки, где скорость почти постоянна, и суммируем времена. Сумма окажется площадью под графиком.

Обозначения. Чтобы не путать начальную точку с текущей координатой, начальную координату обозначим x_0 (в условии — x), текущую — x. Δx — малый участок пути, Δt — время его прохождения, t — искомое время.

1. Время прохождения малого участка. На малом участке Δx около точки x скорость меняется мало, и движение можно считать равномерным:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v(x)} = \frac{x}{c}\,\Delta x.$$

Скорость положительна ($c > 0$, $x > 0$), тело всё время движется вправо, поэтому до точки $2x_0$ оно дойдёт.

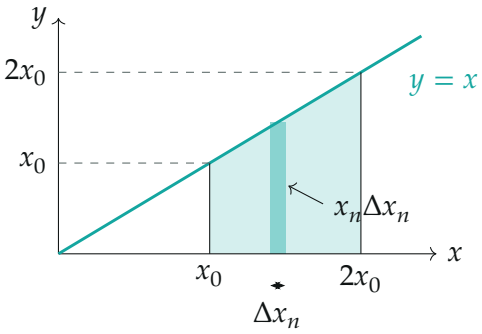


Скорость от координаты — гипербола

2. Полное время — сумма. Разобьём отрезок от x_0 до $2x_0$ на малые участки $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ около точек $x_1, x_2, \ldots$ и сложим времена:

$$t = \frac{1}{c}\left(x_1\Delta x_1 + x_2\Delta x_2 + \ldots\right).$$

Каждое слагаемое $x_n\Delta x_n$ — площадь узкого прямоугольника высотой x_n и шириной Δx_n под графиком функции $y = x$. Сумма всех прямоугольников от x_0 до $2x_0$ — площадь под этим графиком.



Сумма $x_n\Delta x_n$ — площадь трапеции под графиком $y = x$ от x_0 до $2x_0$

3. Площадь трапеции. Фигура под графиком $y = x$ от x_0 до $2x_0$ — трапеция с основаниями x_0 и $2x_0$ и высотой x_0:

$$x_1\Delta x_1 + x_2\Delta x_2 + \ldots = \frac{x_0 + 2x_0}{2}\cdot x_0 = \frac{3x_0^2}{2}.$$

Тот же результат разностью треугольников: $\frac{(2x_0)^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \frac{3x_0^2}{2}$. Получаем

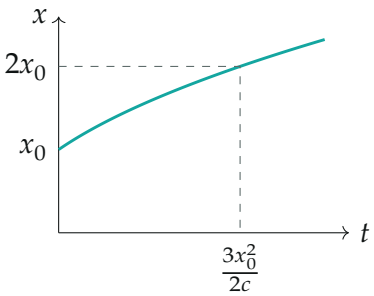
$$t = \frac{3x_0^2}{2c}.$$

В обозначениях условия (начальная координата x): $t = \frac{3x^2}{2c}$.

4. Второй способ — закон движения. Из $x\,\Delta x = c\,\Delta t$ видно, что величина $\frac{x^2}{2}$ растёт равномерно: за Δt она меняется на $x\Delta x = c\Delta t$. Значит,

$$\frac{x^2}{2} = \frac{x_0^2}{2} + ct, \qquad x(t) = \sqrt{x_0^2 + 2ct},$$

и $x = 2x_0$ при $4x_0^2 = x_0^2 + 2ct$, то есть $t = \frac{3x_0^2}{2c}$.



Закон движения $x(t) = \sqrt{x_0^2 + 2ct}$ (в масштабе $x_0 = c = 1$): тело замедляется

Обратите внимание: среднюю скорость нельзя брать как полусумму начальной и конечной. Так вышло бы $\frac{x_0}{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{x_0} + \frac{c}{2x_0}\right)} = \frac{4x_0^2}{3c}$ — неверно, потому что скорость меняется не линейно со временем.

Проверка. Размерность: $[c] = [x][v] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, тогда $\frac{x^2}{c}$ — секунды. Оценка: время лежит между $\frac{x_0}{c/x_0} = \frac{x_0^2}{c}$ (если бы всю дорогу шли с

начальной, самой большой скоростью) и $\dfrac{x_0}{c/(2x_0)} = \dfrac{2x_0^2}{c}$ (с конечной, самой малой); ответ $1{,}5\dfrac{x_0^2}{c}$ — между ними.

Ответ. $t = \dfrac{3x^2}{2c}$, где x — начальная координата тела.