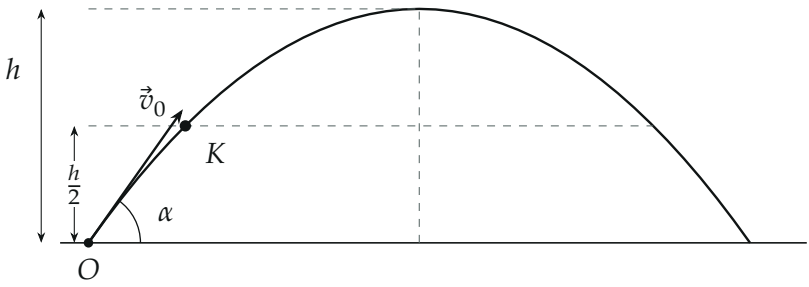
Угол броска по энергиям

Задача 1. [Росатом 2020/21, 10 класс, задача 1] Под каким углом к горизонту было брошено тело, если его кинетическая энергия в момент броска и кинетическая энергия на половине максимальной высоты отличаются в $3/2$ раза.



Поясняющий рисунок: траектория (вычислена для ответа $\alpha \approx 54{,}7°$), K — точка на половине максимальной высоты

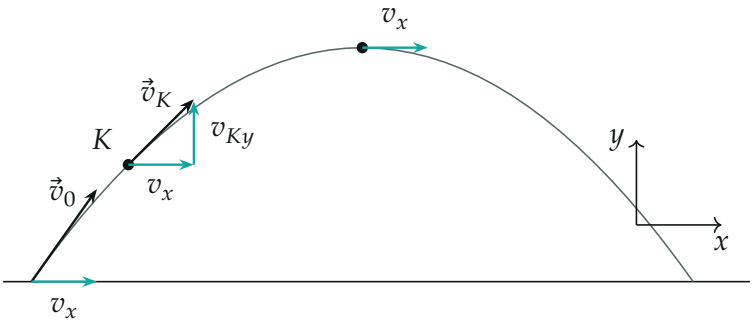
▲ **Решение. Что происходит.** Тело движется только под действием силы тяжести (сопротивлением воздуха пренебрегаем), поэтому механическая энергия сохраняется: на высоте $h/2$ кинетическая энергия меньше начальной на $mg\,h/2$. Максимальная высота зависит от угла броска: поднимает тело только вертикальная составляющая скорости. Значит, «доля» кинетической энергии, потерянная к высоте $h/2$, определяется углом — из неё угол и находится. Класс задачи — закон сохранения энергии вместе с кинематикой броска под углом к горизонту.

Обозначения. m — масса тела, v_0 — начальная скорость, α — угол броска, h — максимальная высота, K — точка траектории на высоте $h/2$ (на подъёме или на спуске — скорость там одна и та же по модулю), $E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ и E_K — кинетические энергии в момент броска и в точке K. Ось x — горизонтально, ось y — вверх.

1. Максимальная высота. Вдоль оси x сила не действует, поэтому $v_x = v_0 \cos\alpha$ не меняется. В верхней точке $v_y = 0$ и скорость равна

$v_0 \cos\alpha$. Закон сохранения механической энергии для движения от точки броска до верхней точки:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} + mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_0^2(1-\cos^2\alpha)}{2g} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$



Скорости в точке броска, в точке K и в верхней точке: горизонтальная составляющая $v_x = v_0\cos\alpha$ одна и та же (бирюзовые стрелки), вертикальная уменьшается

2. Энергия в точке K**.** Закон сохранения механической энергии для движения от точки броска до высоты $h/2$:

$$E_K = E_0 - mg\frac{h}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mg\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{4g},$$

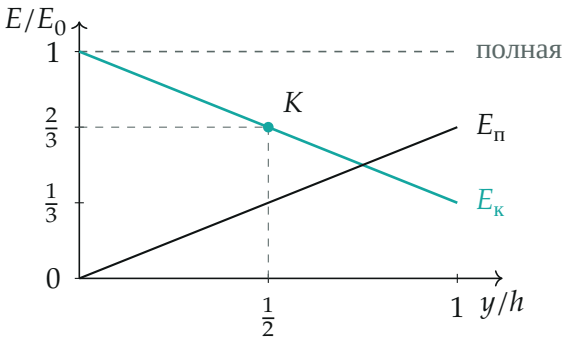
$$E_K = \frac{mv_0^2}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{2}\right) = E_0\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{2}\right).$$

Знак: $E_K < E_0$, так как тело поднялось и часть кинетической энергии перешла в потенциальную. Поэтому «отличаются в $3/2$ раза» означает $E_0 = \frac{3}{2}E_K$.

3. Угол. Подставляем $E_K = \frac{2}{3}E_0$:

$$1 - \frac{\sin^2\alpha}{2} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 54{,}7^\circ.$$

Угол острый (бросок вверх), поэтому берём положительный корень. То же самое: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

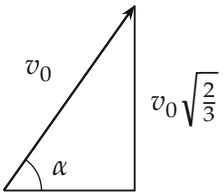


Энергии вдоль подъёма при $\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$: кинетическая убывает линейно с высотой от E_0 до $\frac{1}{3}E_0$ (верхняя точка); на половине высоты — $\frac{2}{3}E_0$

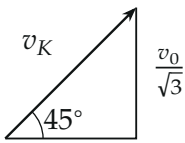
4. Второй способ — через составляющие скорости. Кинематика равноускоренного движения по оси y: $v_y^2 = v_0^2\sin^2\alpha - 2gy$. На высоте $h/2$:

$$v_{Ky}^2 = v_0^2\sin^2\alpha - g\,\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2}, \qquad v_K^2 = v_0^2\cos^2\alpha + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2}.$$

Условие $\frac{v_0^2}{v_K^2} = \frac{3}{2}$ даёт $\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$, то есть $1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$ — то же уравнение. При найденном угле $v_{Ky}^2 = \frac{1}{3}v_0^2 = v_x^2$: в точке K скорость направлена под 45° к горизонту.



бросок



точка K

Треугольники скоростей: горизонтальная составляющая сохраняется, квадрат вертикальной к высоте $h/2$ уменьшился вдвое; $v_K^2 = \frac{2}{3}v_0^2$

Обратите внимание: на половине высоты теряется не половина кинетической энергии, а половина от её «вертикальной» части $\frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2}$ — горизонтальная часть $\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2}$ не тратится вовсе.

Ответ. $h = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$, $E_K = E_0\left(1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{2}\right) = \dfrac{2}{3}E_0$, $\alpha = \arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 54{,}7°$.

Проверка. Ответ безразмерный, $\sin^2\alpha = \frac{2}{3} \le 1$ — угол существует. Пределы: при вертикальном броске ($\alpha = 90°$) на половине высоты остаётся половина энергии, $E_0/E_K = 2$; при почти горизонтальном ($\alpha \to 0$) энергия почти не меняется, отношение $\to 1$. Заданное $3/2$ лежит между ними, и угол получился промежуточным. Численно при $\alpha = 54{,}74°$: $1 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}6667 = 0{,}6667 = \frac{2}{3}$.

Смысл: при $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ на половине высоты вертикальная и горизонтальная составляющие скорости сравниваются, и тело летит под 45°.

Ответ. $\alpha = \arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 54{,}7°$.