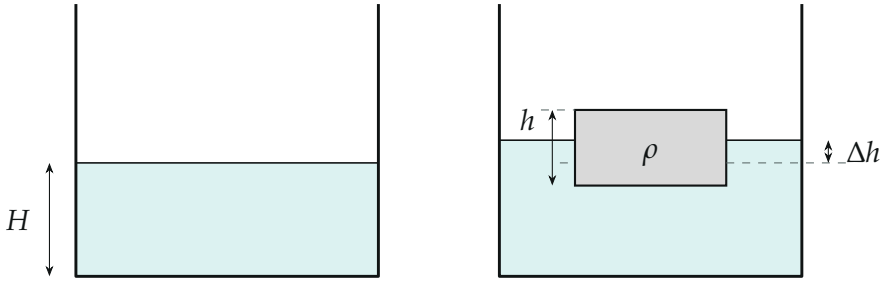
Бруски в высоком сосуде

Задача 2. [Росатом 2020/21, 10 класс, задача 2] В очень высоком цилиндрическом сосуде находится вода. Высота уровня воды в сосуде — H. Когда в сосуд опустили деревянный брусок с плотностью ρ и высотой h, уровень воды поднялся на малую величину Δh. Какова будет высота уровня воды в стакане, когда в него друг на друга поставят столько таких же брусков, что нижний брусок коснётся дна? Плотность воды ρ_0 ($\rho_0 > \rho$).



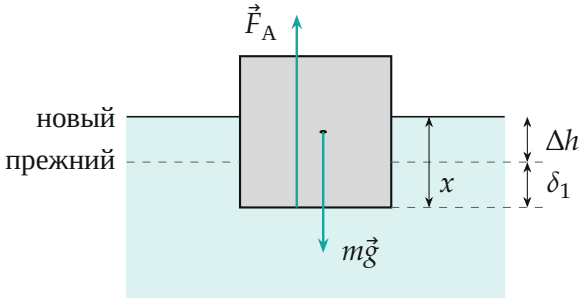
Поясняющий рисунок: без бруска и с одним плавающим бруском высоты h (подъём уровня Δh на рисунке преувеличен)

▲ **Решение. Что происходит.** Брусок легче воды и плавает: сила тяжести уравновешена силой Архимеда, и глубина погружения определяется только отношением плотностей. Площади бруска и сосуда не даны, но их отношение спрятано в Δh: чем шире брусок, тем сильнее он поднимает воду. Стопка из n брусков — это один брусок высоты nh; она садится всё глубже, и когда её дно дошло до дна сосуда, задача решена. Класс задачи — условие плавания и сохранение объёма воды.

Обозначения. S — площадь дна сосуда, s — площадь основания бруска, x — глубина погружения бруска (от нового уровня воды), H_1 — искомый уровень, n — число брусков в стопке.

1. Глубина погружения. Второй закон Ньютона для покоящегося бруска в проекции на вертикальную ось: сила тяжести равна силе Архимеда, $\rho\, sh\, g = \rho_0\, sx\, g$, откуда

$$x = \frac{\rho}{\rho_0}\, h.$$



Брусок: погружён на x от нового уровня, его дно ниже прежнего уровня на $\delta_1 = x - \Delta h$

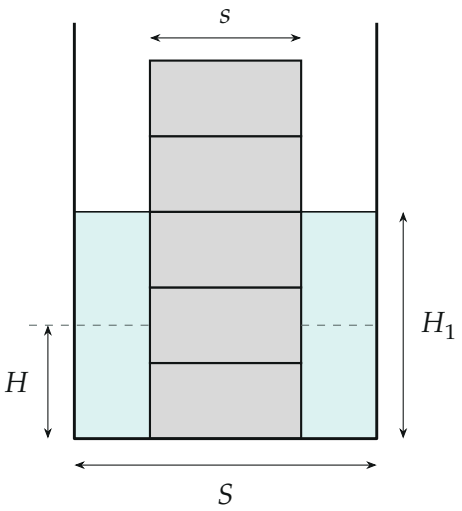
2. Отношение площадей из Δh. Объём воды не меняется (закон сохранения массы, вода несжимаема). Под новым уровнем $H + \Delta h$ находятся та же вода и погружённая часть бруска: $S(H + \Delta h) = SH + sx$. Отсюда

$$S\,\Delta h = s\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{S} = \frac{\Delta h}{x} = \frac{\rho_0\,\Delta h}{\rho\,h}.$$

Так как $s < S$, должно быть $\rho h > \rho_0 \Delta h$. Дно бруска опустилось ниже прежнего уровня на $\delta_1 = x - \Delta h > 0$.

3. Стопка, касающаяся дна. Стопка из n брусков — тело высоты nh с тем же сечением s. Нижний брусок касается дна, а уровень воды H_1 ниже верха стопки (она ведь плавала бы с глубиной погружения $\frac{\rho}{\rho_0} nh < nh$). Значит, вода занимает весь сосуд до высоты H_1, кроме места, занятого стопкой. Объём воды прежний:

$$S\,H = (S - s)\,H_1 \quad \Rightarrow \quad H_1 = \frac{H}{1 - s/S} = \frac{H}{1 - \dfrac{\rho_0 \Delta h}{\rho h}} = \frac{\rho h\,H}{\rho h - \rho_0 \Delta h}.$$

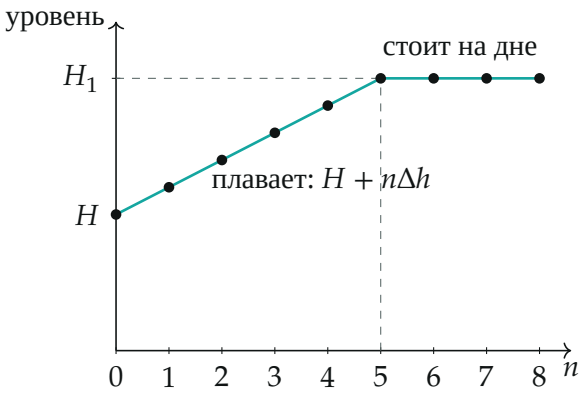


Стопка коснулась дна (здесь $n = 5$ для $\rho = 0{,}6\rho_0$, $s = \frac{1}{2}S$): вода занимает объём $(S - s)H_1$

4. Тот же ответ через погружение стопки. Пока стопка плавает, она подобна одному бруску высоты nh: подъём уровня $n\Delta h$, дно ниже прежнего уровня на $\delta_n = n(x - \Delta h)$. Дно сосуда достигнуто, когда $\delta_n = H$, то есть при $n = \dfrac{H}{x - \Delta h} = \dfrac{\rho_0 H}{\rho h - \rho_0 \Delta h}$, и тогда

$$H_1 = H + n\,\Delta h = H\left(1 + \frac{\rho_0\,\Delta h}{\rho h - \rho_0\,\Delta h}\right) = \frac{\rho h\,H}{\rho h - \rho_0 \Delta h}$$

— то же, что в п. 3.



Уровень воды от числа брусков (H, $\rho/\rho_0 = 0{,}6$, $s/S = \frac{1}{2}$ — как на рисунке выше): растёт на Δh за брусок, пока стопка плавает, и дальше не меняется

Обратите внимание: число брусков n из п. 4 обычно не целое. Ответ от этого не зависит: стопка, стоящая на дне, держит уровень H_1 из п. 3 при любом числе брусков, лишь бы её верх был выше воды. Поэтому, если n округлить вверх до целого, уровень тот же — график после касания горизонтален.

Ответ. $x = \dfrac{\rho}{\rho_0}h$, $\dfrac{s}{S} = \dfrac{\rho_0\Delta h}{\rho h}$, $H_1 = H\left(1 + \dfrac{\rho_0\,\Delta h}{\rho h - \rho_0\,\Delta h}\right) = \dfrac{\rho h\, H}{\rho h - \rho_0 \Delta h}$.

Проверка. Размерность: дробь безразмерна, H_1 — в метрах. Пределы: $\Delta h \to 0$ (очень узкий брусок) даёт $H_1 \to H$; если брусок почти во весь сосуд ($s \to S$, $\rho h \to \rho_0 \Delta h$), вода выдавливается вверх тонкой щелью, $H_1 \to \infty$ — для этого сосуд и «очень высокий». Числа рисунка ($H = 6$, $h = 4$, $\rho/\rho_0 = 0{,}6$, $\Delta h = 1{,}2$): $H_1 = \frac{2{,}4\cdot 6}{2{,}4-1{,}2} = 12$, по п. 4 $n = 5$, $6 + 5 \cdot 1{,}2 = 12$ — совпадает.

Смысл: уровень растёт ровно настолько, чтобы прежний объём воды поместился в кольцевой зазор площадью $S - s$.

Ответ. $H_1 = H\left(1 + \dfrac{\rho_0\,\Delta h}{\rho h - \rho_0\,\Delta h}\right) = \dfrac{\rho h\, H}{\rho h - \rho_0 \Delta h}$.