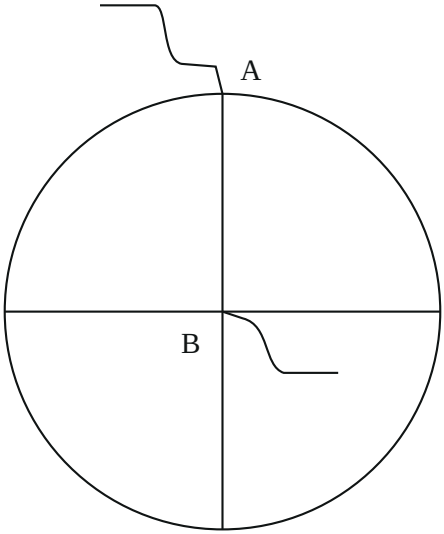
# Кольцо с перемычками

**Задача 3.** [Росатом 2020/21, 10 класс, задача 3] Из проволоки, сопротивление единицы длины которой равно $2\lambda$, изготовили кольцо радиуса $R$. Затем из другой проволоки, сопротивление единицы длины которой $\lambda$, изготовили две перекрещивающиеся под прямым углом диаметральные перемычки и прикрепили к кольцу. Найти сопротивление кольца между точками A и B.

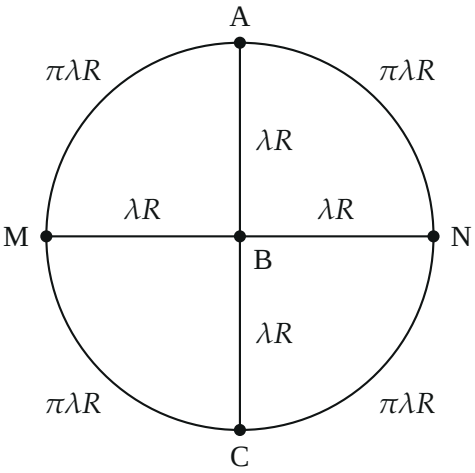



▲ **Решение. Что происходит.** Кольцо и перемычки — сеть резисторов: четыре четверти кольца и четыре половинки перемычек (от центра до кольца). Ток входит в верхнюю точку кольца A и выходит из центра B. Схема симметрична относительно вертикального диаметра AB, поэтому левая и правая точки кольца имеют одинаковый потенциал — их можно соединить, и цепь сведётся к последовательным и параллельным соединениям. Класс задачи — сопротивление симметричной цепи методом равнопотенциальных узлов.

**Обозначения.** Точки кольца: A — верхняя, C — нижняя, M — левая, N — правая; B — центр. $r = \lambda R$ — сопротивление половинки перемычки (длина $R$), $q$ — сопротивление четверти кольца, $U$ — напряжение между A и B.

**1. Сопротивления участков.** Сопротивление провода пропорционально длине. Четверть кольца имеет длину $\frac{\pi R}{2}$, половинка перемычки — $R$:

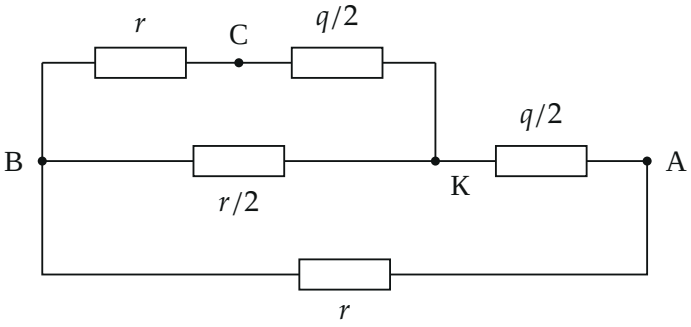
$$q = 2\lambda \cdot \frac{\pi R}{2} = \pi\lambda R, \qquad r = \lambda \cdot R = \lambda R.$$




*Сеть из восьми участков: четверти кольца по $\pi\lambda R$ и половинки перемычек по $\lambda R$*

**2. Симметрия.** Отражение в вертикальном диаметре переводит схему в себя и не меняет точек A и B, поэтому токи в симметричных ветвях одинаковы, а потенциалы M и N равны: $\varphi_M = \varphi_N$. Ток между узлами с равными потенциалами по проводу не течёт, поэтому узлы M и N можно соединить проводом в один узел K — токи от этого не изменятся. Тогда пары одинаковых участков стали параллельными:

$$\text{A–K}: \frac{q}{2}, \qquad \text{K–B}: \frac{r}{2}, \qquad \text{K–C}: \frac{q}{2}, \qquad \text{C–B}: r, \qquad \text{A–B}: r.$$




*Эквивалентная схема после объединения M и N в узел K: всё сводится к последовательным и параллельным соединениям*

**3. Сворачиваем схему.** Ветвь K–C–B: последовательно $\frac{q}{2} + r$. Она параллельна ветви K–B $\frac{r}{2}$:

$$R_{\text{KB}} = \frac{\frac{r}{2}\left(\frac{q}{2} + r\right)}{\frac{r}{2} + \frac{q}{2} + r} = \frac{r\,(q + 2r)}{2\,(q + 3r)}.$$

Последовательно с ней участок A–K $\frac{q}{2}$, а всё это параллельно прямой перемычке A–B $r$:

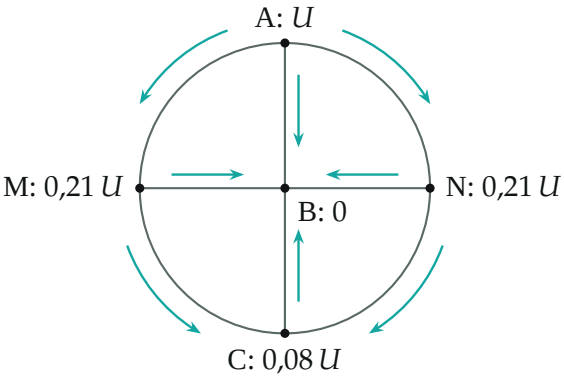
$$R_{\text{AKB}} = \frac{q}{2} + R_{\text{KB}}, \qquad R_{\text{об}} = \frac{r\,R_{\text{AKB}}}{r + R_{\text{AKB}}}.$$

**4. Подставляем** $q = \pi r$**.** Все сопротивления пропорциональны $r = \lambda R$:

$$R_{\text{KB}} = \frac{(\pi + 2)\,r}{2(\pi + 3)}, \qquad R_{\text{AKB}} = \frac{\pi r}{2} + \frac{(\pi + 2)\,r}{2(\pi + 3)} = \frac{(\pi^2 + 4\pi + 2)\,r}{2(\pi + 3)},$$

$$R_{\text{об}} = \frac{r \cdot \dfrac{\pi^2 + 4\pi + 2}{2(\pi + 3)}\,r}{r + \dfrac{\pi^2 + 4\pi + 2}{2(\pi + 3)}\,r} = \frac{(\pi^2 + 4\pi + 2)\,\lambda R}{\pi^2 + 6\pi + 8} \approx 0{,}665\,\lambda R.$$

Знаменатель $2(\pi + 3) + \pi^2 + 4\pi + 2 = \pi^2 + 6\pi + 8 = (\pi + 2)(\pi + 4)$.




*Потенциалы узлов (расчёт по эквивалентной схеме) и направления токов: от A к B по прямой перемычке и в обход через M, N и C*

Обратите внимание: по нижней половинке перемычки C–B ток идёт (у официального решения эта ветвь заменена двумя параллельными $2\lambda R$, и выбрасывается только перемычка между ними — это то же самое, что наше объединение M и N). Выбрасывать саму C–B нельзя: $\varphi_C \neq \varphi_B$.

**Ответ.** $q = \pi\lambda R$, $r = \lambda R$, $\quad R_{об} = \dfrac{(2+4\pi+\pi^2)\,\lambda R}{(\pi+2)(\pi+4)} \approx 0{,}665\,\lambda R$.

**Проверка.** Размерность: $\lambda R$ — Ом. Предел: $R_{об} < r = \lambda R$ — параллельно прямой перемычке подключены обходные пути, сопротивление меньше. Второй способ — узловые потенциалы для исходной сети из пяти узлов (решение линейной системы на компьютере): $\varphi_M = \varphi_N = 0{,}2104\,U$, $\varphi_C = 0{,}0818\,U$, ток $I = 1{,}5027\,U/(\lambda R)$, $R_{об} = 0{,}66548\,\lambda R$ — совпадает с формулой. Узел M: втекает из A $\frac{1-0{,}2104}{\pi} = 0{,}2513$, вытекает в B 0,2104 и в C $\frac{0{,}2104-0{,}0818}{\pi} = 0{,}0409$ (в единицах $U/\lambda R$), сумма сходится.

Смысл: две трети тока идут по прямой перемычке A–B, остальное — в обход по кольцу; поэтому сопротивление лишь на треть меньше $\lambda R$.

**Ответ.** $R_{об} = \dfrac{(2+4\pi+\pi^2)\,\lambda R}{8+6\pi+\pi^2} \approx 0{,}665\,\lambda R$.