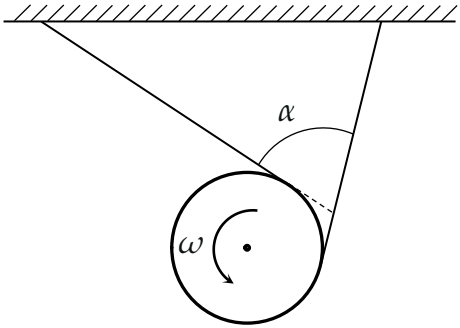
Диск на двух нитях

Задача 5. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 10 класс, задача 5] На массивный диск радиуса R намотаны две невесомые и нерастяжимые нити. Свободные концы нитей прикрепляют к горизонтальному потолку, а диск удерживают в некотором положении. Затем диск отпускают, и он начинает сматываться с нитей, которые при движении диска остаются постоянно натянутыми. Известно, что в некоторый момент времени угловая скорость диска равна ω, а угол между нитями равен α. Найти величину и направление скорости центра диска в этот момент.



▲ **Решение. Что происходит.** Диск одновременно движется поступательно и вращается. Каждая нить — прямой отрезок от неподвижной точки подвеса до точки касания с диском, и она не растягивается. Поэтому точка диска, которая в данный момент касается нити, не может иметь скорости вдоль нити: иначе нить растягивалась бы или провисала. Это условие, записанное для двух нитей, даёт две проекции скорости центра, а по двум проекциям вектор восстанавливается однозначно. Класс задачи — кинематика плоского движения твёрдого тела (сложение поступательной и вращательной скоростей).

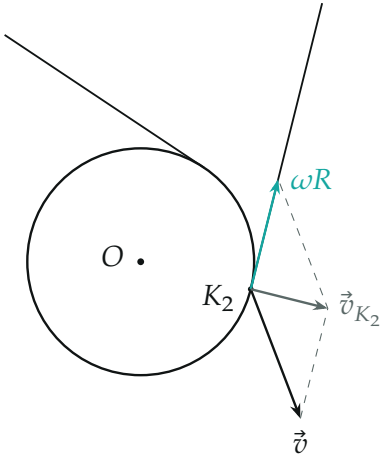
Обозначения. O — центр диска, $\vec{v}$ — его скорость; K_1, K_2 — точки касания левой и правой нитей; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — единичные векторы вдоль нитей, направленные *вниз*, от потолка к диску; α — угол между нитями.

1. Скорость точки касания. Скорость любой точки диска — сумма скорости центра $\vec{v}$ и скорости вращения вокруг центра, по модулю ωR и

направленной по касательной к ободу. В точке касания K_2 касательная к ободу — это сама нить, так что вращательная скорость направлена вдоль нити. Диск сматывается, значит, вращение «тянет» точку обода вверх по нити, а нить в этой точке неподвижна вдоль своего направления (её верхний конец закреплён, длина отрезка от потолка меняется только за счёт сматывания). Проекция скорости точки K_2 на направление нити равна нулю:

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_2 - \omega R = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{e_2} = \omega R.$$

То же для левой нити: $v_{e_1} = \omega R$.



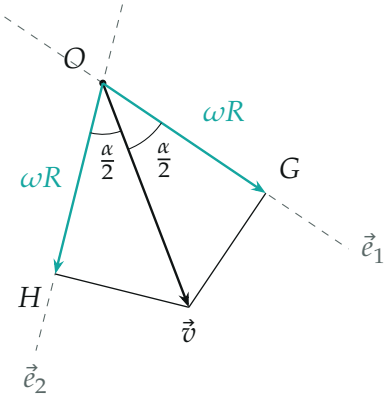
Точка касания K_2: скорость центра $\vec{v}$ плюс вращательная ωR вверх по нити дают скорость $\vec{v}_{K_2}$ поперёк нити

2. Направление скорости центра. Проекции $\vec{v}$ на два направления $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ равны друг другу:

$$v \cos \varphi_1 = v \cos \varphi_2 = \omega R,$$

где φ_1, φ_2 — углы между $\vec{v}$ и $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Значит, $\varphi_1 = \varphi_2$: вектор $\vec{v}$ делит пополам угол между $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Угол между направлениями нитей «вниз» такой же, как между самими нитями, α, поэтому

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

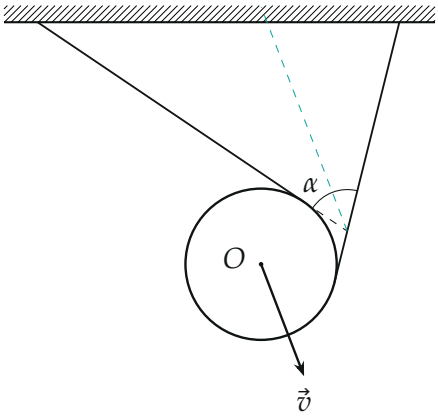


Проекции OG и OH скорости центра на направления нитей равны ωR, поэтому $\vec{v}$ — биссектриса угла α между ними

3. Модуль скорости. Из прямоугольного треугольника «O, G, конец вектора $\vec{v}$» (катет $OG = \omega R$ прилежит к углу $\alpha/2$):

$$v = \frac{\omega R}{\cos(\alpha/2)}.$$

4. Куда направлена скорость. Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ смотрят вниз, от точек подвеса, поэтому и их биссектриса $\vec{v}$ направлена вниз. Прямая $\vec{v}$ параллельна биссектрисе угла α, образованного нитями.



Скорость центра направлена вниз параллельно биссектрисе (бирюзовый пунктир) угла α между нитями

5. Второй способ: перемещение за малое время. За время Δt с диска сматывается по $\omega R\,\Delta t$ каждой нити: свободная часть каждой нити удлиняется на $\omega R\,\Delta t$. Расстояние от точки подвеса до прямой, проходящей через центр перпендикулярно нити, равно длине свободной части нити, поэтому центр сдвигается вдоль каждой нити на $\omega R\,\Delta t$ (поворот нитей за малое Δt мал, его вклад второго порядка). Это те же две проекции перемещения OO': $OO'\cos(\alpha/2) = \omega R\,\Delta t$, откуда $v = OO'/\Delta t = \omega R/\cos(\alpha/2)$.

Обратите внимание. Скорость центра не равна ωR: ωR — только её проекция на каждую нить. При $\alpha \to 180^\circ$ нити почти горизонтальны, и диск падает очень быстро даже при малом ω.

Ответ. $v = \dfrac{\omega R}{\cos(\alpha/2)}$, скорость направлена вниз параллельно биссектрисе угла между нитями.

Проверка. Размерность: $[\omega R] = $ рад/с $\cdot$ м $=$ м/с. Предел $\alpha \to 0$ (нити параллельны и вертикальны) — обычная катушка на нити: $v = \omega R$, формула это даёт. Численная проверка на рисунке выше ($\alpha = 70^\circ$, $\omega R = 1$): $v = 1{,}221$, проекции на обе нити 1,000.

Смысл: две натянутые нити задают две проекции скорости центра, и по ним вектор находится однозначно.

Ответ. $v = \dfrac{\omega R}{\cos(\alpha/2)}$; центр движется вниз, параллельно биссектрисе угла между нитями.