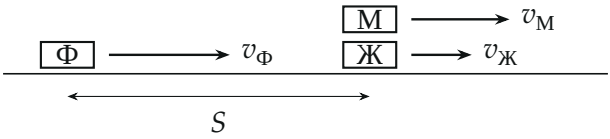
Феррари, Мерседес и Жигули

Задача 2. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 10 класс, задача 2] Феррари, Мерседес и Жигули движутся с постоянными скоростями по прямой дороге. Когда Мерседес и Жигули находились в одной точке, Феррари был на расстоянии S позади. Когда Феррари догнал Жигули, Мерседес был впереди них на расстоянии $2S/3$. На каком расстоянии позади Феррари и Мерседеса окажутся Жигули в тот момент, когда Феррари догонит Мерседес?



Поясняющий рисунок: начальный момент (Мерседес нарисован рядом с Жигулями, хотя они в одной точке дороги)

▲ **Решение. Что происходит.** Все три машины едут равномерно. Удобнее всего смотреть на движение из Жигулей: в этой системе отсчёта Жигули стоят, а Феррари и Мерседес едут равномерно со своими относительными скоростями. Расстояния между машинами от системы отсчёта не зависят, поэтому ответ, найденный «из Жигулей», и есть ответ задачи. Класс задачи — относительное движение (закон сложения скоростей Галилея).

Обозначения. В системе отсчёта Жигулей ось x направлена по движению, начало — в Жигулях; $u_Ф = v_Ф - v_Ж$ и $u_М = v_М - v_Ж$ — относительные скорости Феррари и Мерседеса; t_1 — момент, когда Феррари догнал Жигули; t_2 — когда Феррари догнал Мерседес; x — искомое расстояние.

1. Знаки скоростей. Феррари догоняет и Жигули, и Мерседес, поэтому $u_Ф > 0$ и $u_Ф > u_М$. Мерседес в момент t_1 впереди Жигулей, значит, $u_М > 0$. Итак, $v_Ж < v_М < v_Ф$.

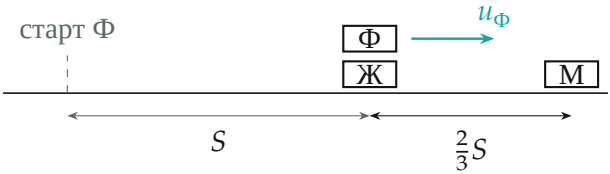
2. Феррари догоняет Жигули. В системе Жигулей Феррари стартует из $x = -S$, Мерседес — из $x = 0$. Закон равномерного движения $x =$

$x_0 + ut$:

$$\text{Феррари: } -S + u_\Phi t_1 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{S}{u_\Phi}; \qquad \text{Мерседес: } u_\text{М} t_1 = \frac{2S}{3}.$$

Отсюда отношение скоростей:

$$\frac{u_\text{М}}{u_\Phi} = \frac{2S/3}{S} = \frac{2}{3}.$$



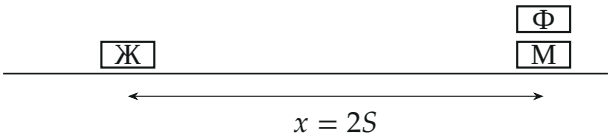
Момент t_1 в системе отсчёта Жигулей: Феррари прошёл S, Мерседес за то же время — $\frac{2}{3}S$

3. Феррари догоняет Мерседес. Координаты Феррари и Мерседеса совпадают в момент t_2:

$$-S + u_\Phi t_2 = u_\text{М} t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{S}{u_\Phi - u_\text{М}}.$$

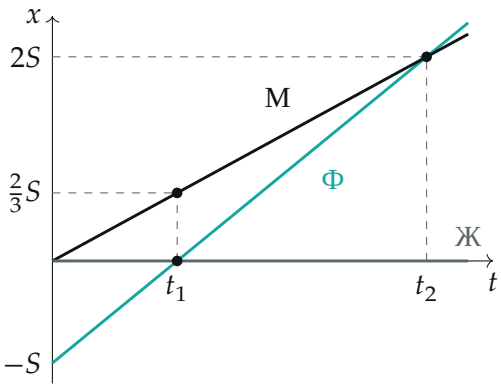
В этот момент обе машины находятся на расстоянии от Жигулей

$$x = u_\text{М} t_2 = \frac{S\,u_\text{М}}{u_\Phi - u_\text{М}} = \frac{S}{u_\Phi/u_\text{М} - 1} = \frac{S}{3/2 - 1} = 2S.$$



Момент t_2: Феррари догнал Мерседес, Жигули отстали на $2S$

4. Графики движения. Тот же результат виден на графиках $x(t)$ в системе Жигулей (масштаб: $S = 3$ клетки, $u_Ф = 1$ клетка за единицу времени, $u_М = \frac{2}{3}$). Прямая Феррари пересекает ось времени ($x = 0$, Жигули) при $t_1 = 3$, когда прямая Мерседеса на высоте $2 = \frac{2}{3}S$; прямые Феррари и Мерседеса пересекаются при $t_2 = 9$ на высоте $6 = 2S$.



Графики движения в системе отсчёта Жигулей: Жигули — ось t, Феррари — бирюзовая прямая, Мерседес — чёрная

Обратите внимание. В системе отсчёта Жигулей в ответ входят только относительные скорости, и нужно лишь их отношение $u_Ф/u_М = 3/2$. Сами скорости машин найти нельзя, и они не нужны.

Ответ. $x = \dfrac{S\,u_М}{u_Ф - u_М} = \dfrac{S \cdot \frac{2}{3}S}{S - \frac{2}{3}S} = 2S.$

Проверка. Второй способ — в системе отсчёта Мерседеса: Жигули удаляются назад, Феррари приближается. За время t_1 Феррари сократил отставание от Мерседеса с S до $\frac{2}{3}S$, то есть на $\frac{1}{3}S$, а Жигули отстали от Мерседеса на $\frac{2}{3}S$. Отставание Феррари уменьшается равномерно, на оставшиеся $\frac{2}{3}S$ уйдёт ещё $2t_1$; Жигули к этому моменту отстанут на $\frac{2}{3}S \cdot 3 = 2S$ — то же. Размерность — длина.

Смысл: относительно Жигулей Мерседес едет в 1,5 раза медленнее Феррари, и Феррари, отставая на S, нагоняет его на расстоянии $2S$.

Ответ. $x = 2S$.