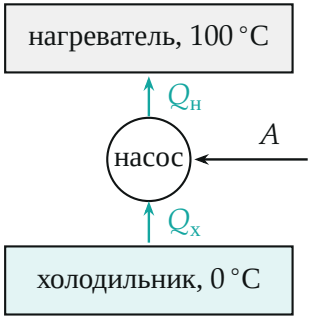
Тепловой насос и лёд

Задача 3. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 10 класс, задача 3] Тепловой насос, работающий по обратному циклу Карно, передаёт тепло от холодильника с водой при температуре $t_1 = 0\,^\circ\text{C}$ нагревателю с водой при температуре $t_2 = 100\,^\circ\text{C}$. Сколько воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар $m = 1$ кг воды в нагревателе? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг.



Поясняющий рисунок: насос забирает $Q_х$ у холодильника, получает работу A и отдаёт $Q_н$ нагревателю

▲ **Решение. Что происходит.** Тепловой насос — тепловая машина, запущенная «наоборот»: внешняя сила совершает над рабочим телом работу A, и рабочее тело переносит тепло от холодного тела к горячему. Холодильник — вода при 0 °C: отдавая тепло, она замерзает при постоянной температуре. Нагреватель — вода при 100 °C: получая тепло, она кипит при постоянной температуре. Поэтому обе температуры цикла Карно постоянны, а отношение теплот для цикла Карно задаётся только температурами. Класс задачи — тепловые машины (первый закон термодинамики для цикла + КПД цикла Карно) с фазовыми переходами.

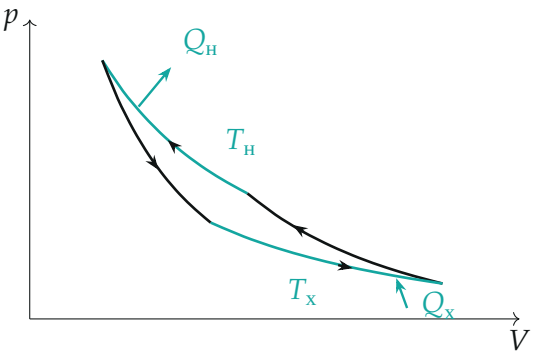
Обозначения. $T_х = 273\,\text{K}$, $T_н = 373\,\text{K}$ — абсолютные температуры холодильника и нагревателя; $Q_х$ — теплота, взятая у холодильника; $Q_н$ — теплота, отданная нагревателю; A — работа внешних сил над рабочим телом за цикл; m_1 — масса замёрзшей воды.

1. Первый закон термодинамики для цикла. За цикл внутренняя энергия рабочего тела возвращается к исходной, поэтому всё полученное (теплота $Q_х$ и работа A) отдаётся нагревателю:

$$Q_н = Q_х + A.$$

2. Цикл Карно. Обратный цикл Карно — тот же цикл, что и прямой, пройденный в обратную сторону: все количества теплоты и работа меняют знак, а их модули остаются прежними. Для прямого цикла Карно КПД

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = 1 - \frac{T_х}{T_н} \quad \Rightarrow \quad Q_х = Q_н - A = Q_н \frac{T_х}{T_н}, \qquad \frac{Q_х}{Q_н} = \frac{T_х}{T_н}.$$



Обратный цикл Карно (одноатомный идеальный газ, $T_х : T_н = 273 : 373$, обход против часовой стрелки): на изотерме $T_х$ газ расширяется и забирает $Q_х$, на изотерме $T_н$ его сжимают, и он отдаёт $Q_н$

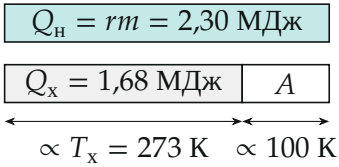
3. Тепловой баланс нагревателя. Чтобы испарить при 100 °C воду массой m, нужна теплота $Q_н = rm$. Тогда холодильник отдаёт

$$Q_х = \frac{T_х}{T_н} rm.$$

4. Тепловой баланс холодильника. Вода при 0 °C, отдавая теплоту

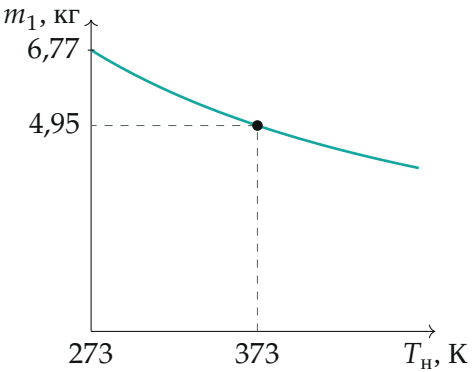
$Q_х$, замерзает: $Q_х = \lambda m_1$. Поэтому

$$m_1 = \frac{Q_х}{\lambda} = \frac{T_х\, r\, m}{T_н \lambda} = \frac{273 \cdot 2{,}3 \cdot 10^6 \cdot 1}{373 \cdot 3{,}4 \cdot 10^5}\ \text{кг} \approx 4{,}95\ \text{кг}.$$



Энергия за всё время работы: $Q_н$ и $Q_х$ относятся как 373 : 273, разница — работа $A \approx 0{,}62$ МДж

5. Сравнение теплот фазовых переходов. Теплота замерзания 1 кг льда λ почти в 7 раз меньше теплоты испарения r, а насос «добавляет» к взятому у холодильника только $\approx$ 37 %. Поэтому замёрзнуть должно почти в 5 раз больше воды, чем испарится. График показывает, как m_1 зависела бы от температуры нагревателя при том же холодильнике ($m_1 = \frac{rm}{\lambda} \cdot \frac{T_х}{T_н}$, r считаем неизменным).



Масса замёрзшей воды на 1 кг пара в зависимости от температуры нагревателя; при $T_н \to T_х$ работа не нужна и $m_1 \to rm/\lambda \approx 6{,}77$ кг

Обратите внимание. В формулу Карно входят абсолютные температуры: подстановка 0 и 100 градусов Цельсия даёт бессмыслицу ($m_1 = 0$).

Ответ. $m_1 = \dfrac{T_\text{х}\, r\, m}{T_\text{н}\, \lambda} = \dfrac{(t_1 + 273)\, r\, m}{(t_2 + 273)\, \lambda} \approx 4{,}95$ кг.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Дж/кг} \cdot \text{кг}}{\text{Дж/кг}} = \text{кг}$. Предел $T_\text{н} \to T_\text{х}$: работа не нужна, всё тепло замерзания идёт на испарение, $\lambda m_1 = rm$ — формула это даёт. Знак: $m_1 < rm/\lambda$, потому что часть теплоты нагревателю даёт работа насоса.

Смысл: идеальный насос переносит тепло «вверх» по температуре, и чем горячее нагреватель, тем большую долю отданного тепла составляет работа.

Ответ. $m_1 = \dfrac{T_1 rm}{T_2 \lambda} \approx 4{,}95$ кг ($T_1 = 273$ К, $T_2 = 373$ К).