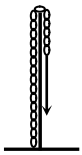
Цепочка на стенку

Задача 4. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 10 класс, задача 4] Около тонкой гладкой вертикальной стенки лежит цепочка с очень мелкими звеньями длиной l и массой m. Высота стенки меньше длины цепочки и равна $5l/6$. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы втащить цепочку на стенку так, как показано на рисунке?



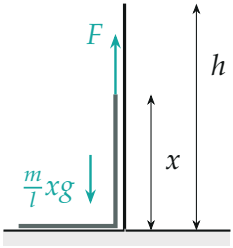
▲ **Решение. Что происходит.** Работа минимальна, если цепочку тащить медленно: кинетической энергии она не получает, а стенка гладкая, трения нет. Тогда работа внешней силы равна изменению потенциальной энергии цепочки. Найдём её двумя способами: через силу, которую надо прикладывать к концу (площадь под графиком $F(x)$), и через положение центров масс частей цепочки. Класс задачи — работа переменной силы и потенциальная энергия протяжённого тела.

Обозначения. $h = \frac{5}{6}l$ — высота стенки; x — путь, пройденный концом цепочки вдоль неё; F — сила, с которой тянут конец (вдоль цепочки); $\frac{m}{l}$ — масса единицы длины.

1. Подъём вдоль стенки ($0 \le x \le h$). Поднятый вертикальный кусок длиной x весит $\frac{m}{l}xg$; остальная цепочка лежит на полу, и её вес уравновешен полом. Условие равновесия поднятого куска (тянем медленно, ускорения нет; гладкая стенка трения не даёт):

$$F = \frac{mg}{l}x.$$

К моменту $x = h$ сила выросла до $\frac{5}{6}mg$.



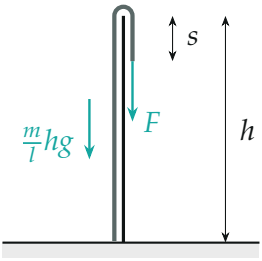
Первый этап: поднят кусок длиной x, сила равна его весу

2. Переваливание через стенку ($h \le x \le l$). Теперь конец прошёл верх стенки и опускается с другой стороны на $s = x - h$. Цепочка лежит на гладкой стенке, как на блоке без трения: натяжение одинаково по обе стороны от верха. Ближний вертикальный кусок длиной h тянет цепочку вниз со стороны пола, дальний кусок длиной s — вниз с другой стороны. Чтобы удержать конец, нужна сила вдоль цепочки

$$F = \frac{mg}{l}(h - s) = \frac{mg}{l}(2h - x),$$

направленная вниз на дальнем конце. При $x = l$ (вся цепочка поднята, на дальней стороне висит $l - h = \frac{1}{6}l$):

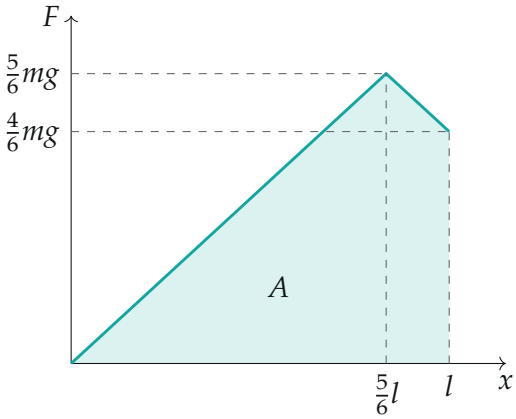
$$F = \frac{mg}{l}\left(\frac{5}{6}l - \frac{1}{6}l\right) = \frac{4}{6}mg.$$



Второй этап: дальний кусок длиной $s = x - h$ уже помогает тянуть, сила F на конце — вес $h - s$ цепочки

3. Работа как площадь под графиком. Сила направлена вдоль цепочки, конец движется тоже вдоль неё, поэтому работа — площадь под графиком $F(x)$: треугольник от 0 до h и трапеция от h до l:

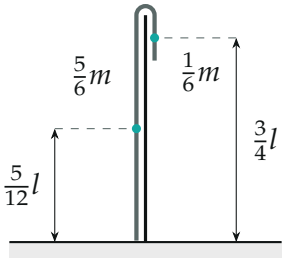
$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}l\cdot\frac{5}{6}mg + \frac{1}{6}l\cdot\frac{\frac{5}{6}mg + \frac{4}{6}mg}{2} = \frac{25}{72}\,mgl + \frac{9}{72}\,mgl = \frac{34}{72}\,mgl = \frac{17}{36}\,mgl.$$



Сила на конце цепочки: растёт до $\frac{5}{6}mg$, пока конец идёт вдоль стенки, затем падает до $\frac{4}{6}mg$; работа — закрашенная площадь

4. Второй способ: энергия. Работа равна приросту потенциальной энергии, отсчитанной от пола. В конце ближний кусок массой $\frac{5}{6}m$ стоит вертикально, его центр масс на высоте $\frac{h}{2} = \frac{5}{12}l$; дальний кусок массой $\frac{1}{6}m$ висит от верха вниз, его центр на высоте $h - \frac{l}{12} = \frac{3}{4}l$. Вначале цепочка лежит на полу ($E_\text{п} = 0$):

$$A = \frac{5}{6}mg\cdot\frac{5}{12}l + \frac{1}{6}mg\cdot\frac{3}{4}l = \frac{25}{72}\,mgl + \frac{9}{72}\,mgl = \frac{17}{36}\,mgl.$$



Конечное положение: центры масс двух вертикальных кусков

Обратите внимание. После того как конец перевалил через стенку, сила уменьшается: дальний кусок своим весом помогает тянуть. Если считать, что сила всё время растёт до mg, получится лишняя работа.

Ответ. $A = \dfrac{25}{72}mgl + \dfrac{9}{72}mgl = \dfrac{17}{36}\,mgl.$

Проверка. Два способа (площадь под $F(x)$ и прирост энергии) дали одно и то же. Размерность: кг $\cdot$ м/с^2 $\cdot$ м $=$ Дж. Предел: если бы стенка была высотой l ($s = 0$ в конце), получилось бы $\frac{1}{2}mgl$ — подъём центра масс на $\frac{l}{2}$; наш ответ $\frac{17}{36} \approx 0{,}47$ немного меньше, потому что верх цепочки ниже.

Смысл: минимальная работа — это прирост потенциальной энергии, а «перекинутый» кусок частично уравновешивает ближний.

Ответ. $A = \dfrac{17}{36}\,mgl.$