Заряженная пластинка в жидком диэлектрике

Задача 5. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 10 класс, задача 5] Тонкая металлическая пластинка площади S залита в очень широком сосуде слоем жидкого диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε и плотностью ρ так, что толщина слоя диэлектрика много меньше линейных размеров пластинки. Пластинка заряжена положительным зарядом Q. Поднимется или опустится уровень жидкости над пластиной, и если да, то на сколько?



▲ **Решение. Что происходит.** Заряженная пластинка создаёт над собой однородное поле (слой тонкий по сравнению с размерами пластинки, краевыми эффектами пренебрегаем). Диэлектрик в поле поляризуется, и поле втягивает его в область, где оно сильнее: замена воздуха диэлектриком уменьшает энергию поля. Поэтому жидкость над пластинкой поднимается, пока «электрическое» давление не уравновесится гидростатическим. Найдём это давление из закона сохранения энергии при малом сдвиге поверхности. Класс задачи — силы, действующие на диэлектрик в электрическом поле (энергия поля + гидростатика).

Обозначения. $\sigma = \dfrac{Q}{2S}$ — заряд на единицу площади каждой стороны пластинки (она тонкая, окружена одинаково, заряд делится поровну); E_0 — поле в воздухе над жидкостью; E — поле в жидкости; q — связанный заряд на поверхности жидкости; Δh — подъём уровня над пластинкой относительно уровня вдали от неё.

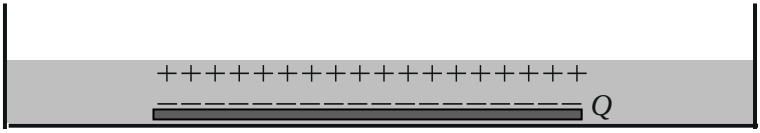
1. Поле над пластинкой. В воздухе над жидкостью поле такое же, как у плоскости с зарядом σ на сторону, а в жидкости оно в ε раз меньше:

$$E_0 = \frac{Q}{2S\varepsilon_0}, \qquad E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{Q}{2S\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Ослабление поля создают связанные заряды: $-q$ у пластинки и $+q$ на верхней поверхности жидкости. Их поле внутри слоя $q/(S\varepsilon_0)$ направле-

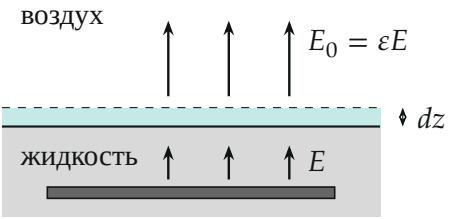
но против поля пластинки:

$$\frac{Q}{2S\varepsilon_0} - \frac{q}{S\varepsilon_0} = \frac{Q}{2S\varepsilon\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} Q.$$



Связанные заряды: «минусы» у пластинки, «плюсы» на поверхности жидкости

2. Энергия поля в слое. Объёмная плотность энергии поля $w = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2$. Над единицей площади пластинки в воздухе $w_0 = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$, в жидкости $w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ — в ε раз меньше.



Мысленный сдвиг: поверхность жидкости поднялась на dz, бирюзовый слой воздуха с полем E_0 стал жидкостью с полем E

3. Сила, тянущая поверхность вверх. Сдвинем поверхность жидкости над пластинкой на dz вверх. Заряд пластинки не меняется, поэтому и σ, и поля E_0, E остаются прежними; меняется лишь то, что слой толщиной dz над площадью S был воздухом, а стал жидкостью. Энергия поля уменьшилась на

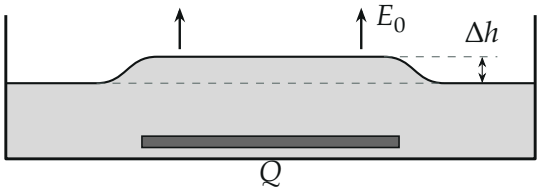
$$dW = (w_0 - w)\, S\, dz = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) S\, dz.$$

По закону сохранения энергии (заряды изолированы, источников нет) эту энергию отдала работа электрических сил над жидкостью: $F\,dz = dW$. Сила на единицу площади поверхности — «электрическое давление», направленное вверх (энергия уменьшается при подъёме):

$$p_{\text{эл}} = \frac{F}{S} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{(\varepsilon - 1)\,Q^2}{8\,\varepsilon\,\varepsilon_0\,S^2}.$$

4. Равновесие жидкости. Вдали от пластинки поля нет. Жидкость над пластинкой поднимается, пока гидростатическое давление столба Δh не уравновесит тягу поля (закон Паскаля для жидкости, сообщающейся с областью без поля):

$$\rho g\,\Delta h = p_{\text{эл}} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{(\varepsilon - 1)\,Q^2}{8\,\varepsilon\,\varepsilon_0\,\rho g\,S^2}.$$



Над пластинкой жидкость стоит выше на Δh (вертикальный масштаб сильно увеличен)

Обратите внимание. У организаторов $\Delta h = \frac{(\varepsilon^2-1)Q^2}{8S^2\varepsilon^2\varepsilon_0\rho g}$: они берут силу только на связанный заряд q поверхности (поле $\frac{Q-q}{2S\varepsilon_0}$), а это не вся сила на поляризованную жидкость, отсюда лишний множитель $\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$; энергетический расчёт и предел $\varepsilon - 1 \ll 1$ (ниже) дают наш ответ.

Ответ. Уровень поднимется на $\Delta h = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2\rho g} = \dfrac{(\varepsilon - 1)\,Q^2}{8\,\varepsilon\,\varepsilon_0\,\rho g\,S^2}$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Ф/м} \cdot \text{кг/м}^3 \cdot \text{м/с}^2 \cdot \text{м}^4} = \dfrac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{Н}} = \text{м}$. Предел $\varepsilon \to 1$: жидкость не поляризуется, $\Delta h \to 0$. Слабо поляризуемая жидкость ($\varepsilon - 1 \ll 1$): энергия её объёма V во внешнем поле $-\frac{1}{2}(\varepsilon-1)\varepsilon_0 E_0^2 V$,

откуда давление $\frac{1}{2}(\varepsilon-1)\varepsilon_0 E_0^2$ — наша формула даёт ровно это. Предел $\varepsilon \to \infty$ (проводящая жидкость): $p_{\text{эл}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ — известное давление поля на поверхность проводника.

Смысл: поле втягивает диэлектрик туда, где оно сильнее, и над заряженной пластинкой жидкость «вспучивается».

Ответ. Поднимется на $\Delta h = \dfrac{(\varepsilon-1)\,Q^2}{8\,\varepsilon\,\varepsilon_0\,\rho g\,S^2}$.