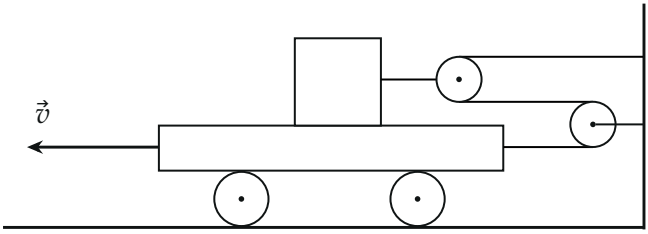
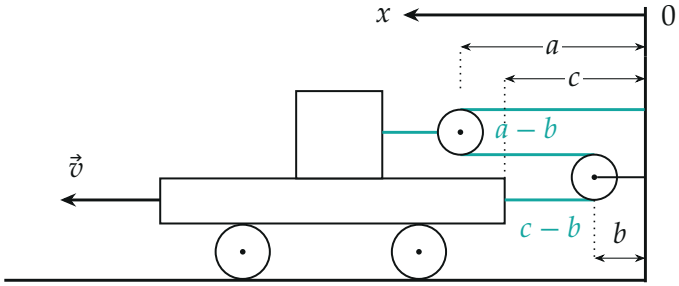
Груз на тележке

Задача 1. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 1] На тележке установлен груз, который с помощью веревки через систему блоков связан со стенкой. Тележку начинают перемещать со скоростью v (см. рисунок). Найти скорость груза относительно тележки. Нить нерастяжима.



▲ **Решение. Что происходит.** Нить нерастяжима, поэтому сумма длин всех её участков остаётся постоянной, и перемещения тележки и груза жёстко связаны. Блок, на котором висит конец нити, закреплённый на грузе, подвижный: он едет вместе с грузом. Второй блок закреплён на стенке. Тележка уезжает от стенки и вытягивает нить, значит, подвижный блок вместе с грузом приближается к стенке. Груз и тележка едут навстречу друг другу (если смотреть из системы отсчёта стенки), поэтому *относительно тележки* груз едет быстрее, чем относительно земли: скорости складываются. Это задача на кинематическую связь, её удобно решать методом координат.

Обозначения. Ось x направим от стенки влево, вдоль скорости тележки: тогда скорость тележки положительна. Начало отсчёта — на стенке. Пусть a — координата оси подвижного блока (и груза, он связан с блоком нитью), b — координата оси неподвижного блока (постоянная), c — координата правого края тележки, к которому привязана нить. Скорость тележки относительно земли $\dot{c} = v$; $\dot{a}$ — проекция скорости груза относительно земли; u — проекция скорости груза относительно тележки.



Нить (бирюзовая) состоит из трёх прямых участков; ось x идёт от стенки по скорости тележки

1. Длина нити. Нить состоит из трёх прямых участков и двух дуг на блоках. Дуги всё время лежат на блоках одной и той же частью окружности, их длины постоянны. Прямые участки горизонтальны:

- от стенки до подвижного блока — длина a;
- от подвижного блока до неподвижного — длина $a - b$;
- от неподвижного блока до тележки — длина $c - b$.

Нить нерастяжима, поэтому её полная длина постоянна:

$$a + (a - b) + (c - b) + \text{const} = L, \qquad \text{то есть} \qquad 2a + c = \text{const}.$$

Подвижная координата a входит в сумму дважды: к подвижному блоку подходят сразу два участка нити. Координата b не меняется (ось блока закреплена на стенке), поэтому уходит в константу.

2. Скорость груза относительно земли. Рассмотрим малый промежуток времени Δt. За это время тележка смещается на $\Delta c = v\Delta t$, а координата a получает приращение Δa. Постоянство суммы из пункта 1 даёт

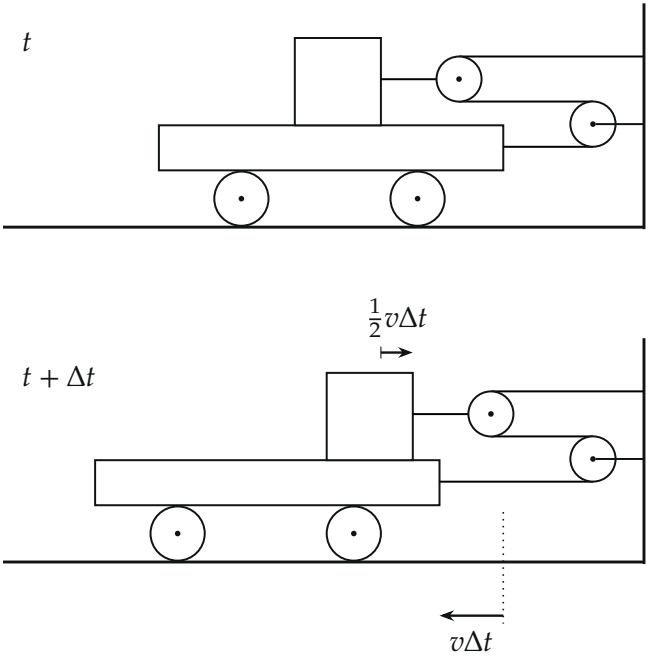
$$2\Delta a + \Delta c = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta a = -\frac{v\Delta t}{2}.$$

Знак минус: блок, а с ним и груз, смещается против оси x, то есть к стенке. Разделим на Δt:

$$\dot{a} = -\frac{v}{2}.$$

Груз едет к стенке со скоростью $v/2$ относительно земли — вдвое мед-

леннее тележки: подвижный блок даёт выигрыш в скорости в два раза.

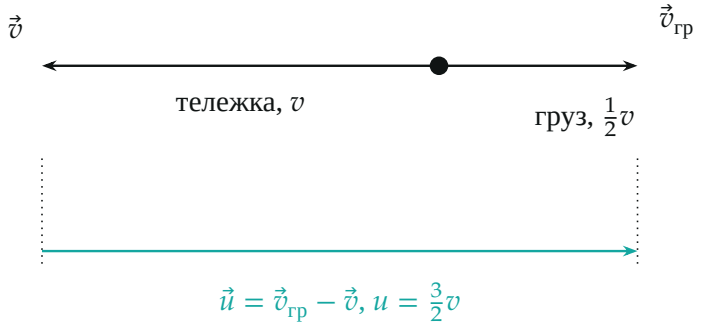


За время Δt тележка уехала от стенки на $v\Delta t$, а груз с блоком приблизился к стенке на $\frac{1}{2}v\Delta t$

3. Скорость груза относительно тележки. Используем закон сложения скоростей: скорость груза относительно тележки равна скорости груза относительно земли минус скорость тележки относительно земли. В проекции на ось x

$$u = \dot{a} - \dot{c} = -\frac{v}{2} - v = -\frac{3v}{2}.$$

Знак минус: груз движется относительно тележки к стенке, то есть против скорости тележки. Модуль $|u| = \dfrac{3v}{2}$.



Груз и тележка едут в противоположные стороны, поэтому относительная скорость равна сумме модулей

Обратите внимание: $v/2$ — это скорость груза относительно *земли*, а не тележки. Груз и тележка движутся навстречу друг другу, поэтому относительно тележки груз едет со скоростью $v/2 + v$, а не $v/2$. Отсюда и ответ $v/2$ в решении организаторов: там верно найдена скорость груза относительно земли, но скорость тележки к ней не прибавлена, хотя рядом сказано, что тележка едет в противоположную сторону.

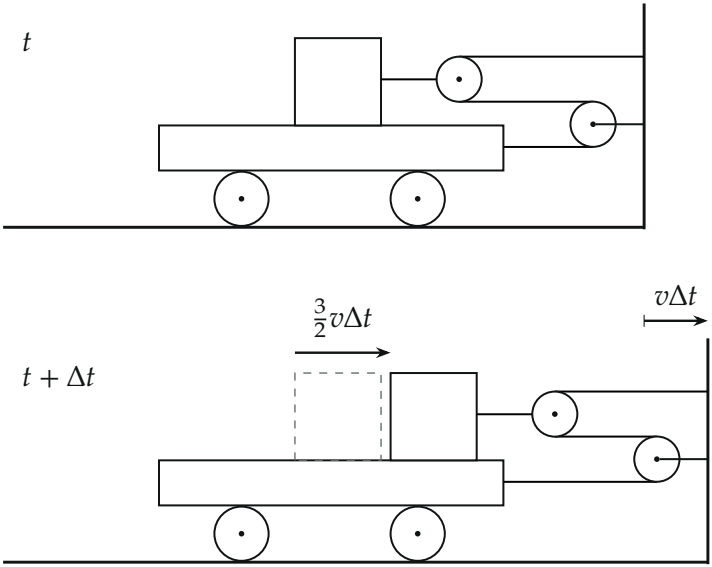
4. Второй способ — в системе отсчёта тележки. Тележка движется поступательно и с постоянной скоростью, значит, эта система инерциальна, и в ней нить по-прежнему нерастяжима. В ней тележка (и привязанный к ней конец нити) неподвижна, а стенка вместе с неподвижным блоком и землёй уезжает от неё со скоростью v против оси x. Обозначим координаты в этой системе штрихами: $c' = 0$, $\dot{w}' = \dot{b}' = -v$ (w' — координата стенки), $\dot{a}' = u$. Длина нити

$$(a' - w') + (a' - b') + (c' - b') = L \quad \Rightarrow \quad 2\dot{a}' - \dot{w}' - 2\dot{b}' + \dot{c}' = 0.$$

Подставим $\dot{a}' = u$, $\dot{w}' = \dot{b}' = -v$, $\dot{c}' = 0$:

$$2u + v + 2v = 0.$$

Отсюда $u = -3v/2$ — тот же ответ.



В системе тележки стенка уезжает на $v\Delta t$, а груз приближается к стенке на $\frac{3}{2}v\Delta t$

Проверка. Размерность: v — скорость, ответ $3v/2$ — тоже скорость. Предел: если бы нить была привязана к грузу напрямую и шла через неподвижный блок к тележке (без подвижного блока), получилось бы $a + c = \text{const}$, $\dot{a} = -v$, $u = -2v$; подвижный блок уменьшает скорость груза вдвое относительно земли, поэтому в сумме $\frac{1}{2}v + v$. Физический смысл: тела движутся в противоположные стороны, значит, их относительная скорость больше скорости каждого из них; ответ $v/2 < v$ этому противоречил бы, а $3v/2 > v$ — нет.

Ответ. Груз движется относительно тележки к стенке (в сторону, противоположную скорости тележки) со скоростью $u = \dfrac{3v}{2}$.