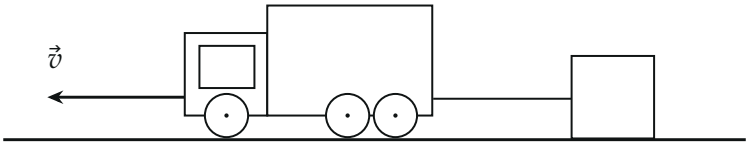
Груз на шнуре за грузовиком

Задача 2. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 2] К грузовику с помощью упругого шнура привязан груз. В начальный момент времени шнур натянут, но не растянут. Грузовик начинает двигаться со скоростью v от груза, растягивая шнур. Через какое время после начала движения груз догонит грузовик? Какую скорость он будет при этом иметь? Масса груза m, жесткость шнура k, длина недеформированного шнура l_0. Закон Гука справедлив для любых растяжений шнура. При «сминании» шнур никакого воздействия не оказывает. На груз сила трения не действует. Скорость грузовика постоянна.



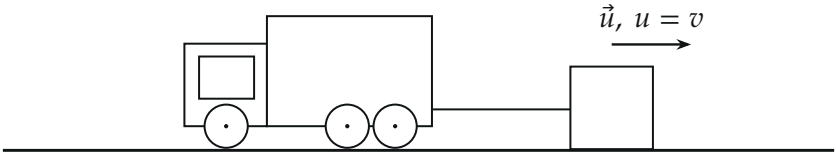
▲ **Решение. Что происходит.** Грузовик едет с постоянной скоростью, значит, его система отсчёта инерциальна, и в ней всё устроено проще: грузовик неподвижен, а груз, который стоял на земле, вдруг получает скорость v в сторону от грузовика. Шнур в этот момент натянут, но не растянут. Пока шнур растянут, горизонтальная сила на груз одна — сила упругости, направленная к грузовику и пропорциональная растяжению: перед нами гармонический осциллятор. Груз успевает пройти половину колебания, вернуться в точку, где шнур снова не растянут, и там его скорость равна по модулю v, но направлена к грузовику. Дальше шнур сминается и ни на что не действует: груз летит с постоянной скоростью и догоняет неподвижный грузовик. Остаётся вернуться в систему отсчёта земли.

Обозначения. Ось x в системе отсчёта грузовика направим от грузовика к грузу, начало отсчёта — положение груза при нерастянутом шнуре (расстояние до грузовика l_0). Тогда координата груза x равна растяжению шнура. Скорость груза относительно грузовика $u = \dot{x}$, скорость груза относительно земли V (проекции на ось x); $\omega = \sqrt{k/m}$.

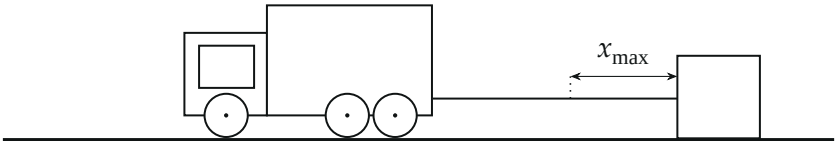
1. Система отсчёта грузовика и начальные условия. Выбираем систему отсчёта, связанную с грузовиком: она движется с постоянной скоростью, поэтому инерциальна, и второй закон Ньютона в ней записывается как обычно. Зачем именно она: точка крепления шнура неподвижна, и растяжение шнура — просто координата груза. В начальный момент груз покоился относительно земли, а грузовик уехал со скоростью v; значит, относительно грузовика

$$x(0) = 0, \qquad u(0) = v > 0.$$

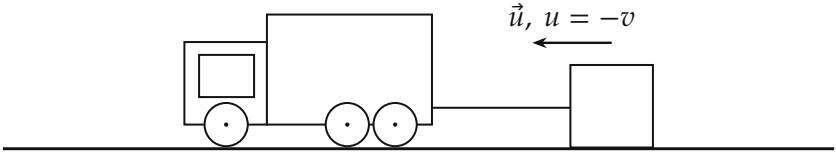
$t = 0$: шнур натянут, но не растянут



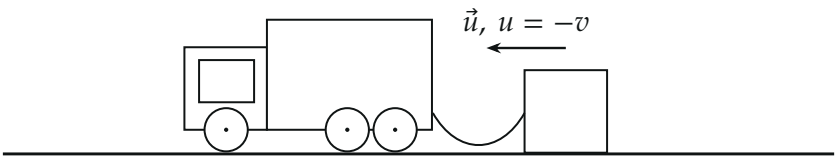
$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{m/k}$: растяжение наибольшее, $u = 0$



$t = \pi\sqrt{m/k}$: шнур снова не растянут



$t > \pi\sqrt{m/k}$: шнур провис, груз летит к грузовику



Четыре момента в системе отсчёта грузовика: растяжение, остановка, возврат и свободный полёт

2. Движение, пока шнур растянут. Рассмотрим груз как тело: вертикальные силы (сила тяжести $m\vec{g}$ и нормальная реакция $\vec{N}$) уравновешены, трения нет, по горизонтали действует только сила упругости шнура $F = -kx$ (закон Гука верен при любом растяжении). Запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Качественная картина: груз летит от грузовика, шнур растягивается, сила упругости растёт и тормозит груз, он останавливается и начинает возвращаться. С учётом начальных условий $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v$ решение

$$x(t) = \frac{v}{\omega}\sin\omega t, \qquad u(t) = \dot{x} = v\cos\omega t.$$

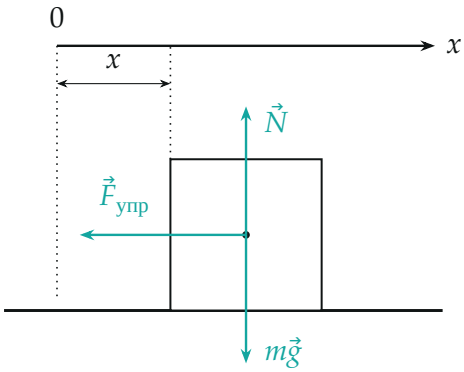


Схема «тело m»: сила упругости направлена к грузовику; x — растяжение шнура

Шнур растянут, пока $x \geq 0$, то есть при $\sin\omega t \geq 0$: от $t = 0$ до $t_1 = \pi/\omega$. Наибольшее растяжение $x_{\max} = v/\omega = v\sqrt{m/k}$ достигается в $t = \pi/(2\omega)$, там $u = 0$. В момент t_1

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad x(t_1) = 0, \qquad u(t_1) = v\cos\pi = -v.$$

То же самое даёт энергия. Система «груз + шнур» замкнута в системе грузовика, поэтому

$$\frac{mu^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

При $x = 0$ получаем $|u| = v$, и знак минус — груз движется к грузовику.

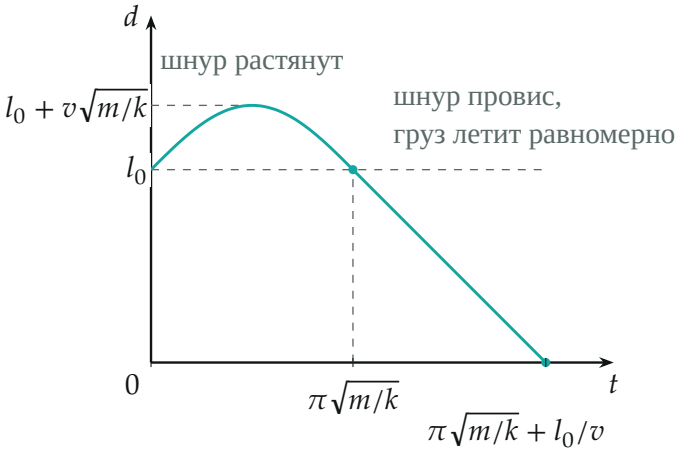
Обратите внимание: формулы гармонического колебания верны только на промежутке $0 \le t \le t_1$. Формально синус продолжился бы в область $x < 0$ (сжатый шнур), но сминающийся шнур груз не толкает, поэтому после t_1 решение $x(t)$ уже не работает.

3. Свободный пролёт. После t_1 горизонтальных сил нет, и груз движется равномерно с $u = -v$. Расстояние от груза до грузовика в момент t_1 равно l_0 (шнур как раз не растянут). Грузовик неподвижен, поэтому груз пролетит это расстояние за

$$t_2 = \frac{l_0}{v}.$$

Полное время до встречи

$$t = t_1 + t_2 = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{l_0}{v}.$$

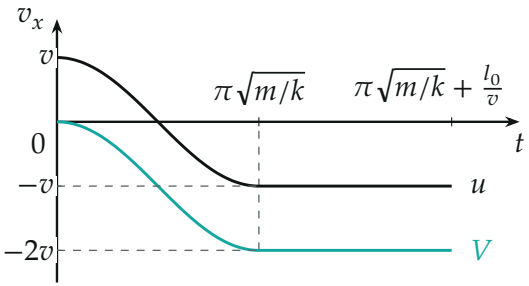


Расстояние от груза до грузовика: растянутый шнур — половина синусоиды, потом груз летит равномерно

4. Скорость груза относительно земли в момент встречи. В момент встречи $u = -v$. Скорость грузовика относительно земли в проекции на ось x (она направлена от грузовика к грузу, а грузовик едет от груза) равна $-v$. По закону сложения скоростей

$$V = u + (-v) = -v - v = -2v.$$

Груз движется со скоростью $2v$ в ту же сторону, что и грузовик.



Скорость груза: u — относительно грузовика, V — относительно земли; $V = u - v$

Качественно в системе земли: пока шнур растянут, он тянет груз за грузовиком, и скорость груза нарастает от нуля до $2v$ (график V); потом груз летит равномерно со скоростью $2v$ и догоняет грузовик, едущий со скоростью v.

Проверка. Размерность: $\sqrt{m/k}$ — секунды (кг/(Н/м) $= \text{с}^2$), l_0/v — тоже секунды. Предел $k \to \infty$ (жёсткий шнур): $t_1 \to 0$, $t \to l_0/v$, а $V = 2v$: груз упруго отскакивает от «стенки» — грузовика, движущегося со скоростью v, и получает $2v$, как шарик от движущейся стенки. Предел $l_0 \to 0$: время $\pi\sqrt{m/k}$ — полупериод колебаний.

Ответ. $t = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} + \dfrac{l_0}{v}$; скорость груза относительно земли в момент встречи равна $2v$ (по направлению скорости грузовика).