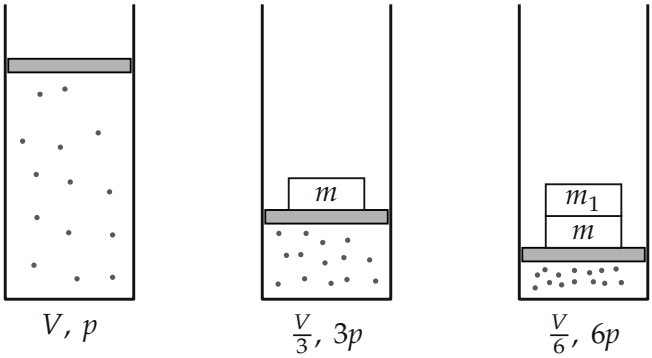
Груз на поршне

Задача 3. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 3] В вертикальном цилиндрическом сосуде под массивным подвижным поршнем находится идеальный газ. Чтобы уменьшить объем газа в 3 раза, на поршень надо положить груз массой m. Какой еще груз надо положить на поршень, чтобы уменьшить объем газа еще в 2 раза? Температура газа поддерживается постоянной.



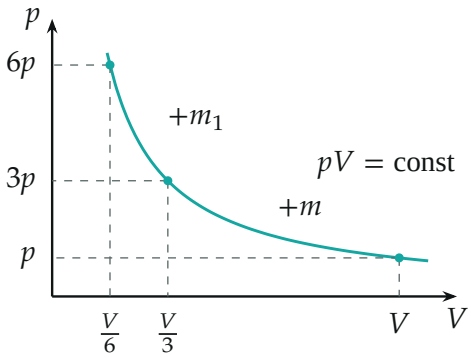
Поясняющий рисунок: три состояния газа — без груза, с грузом m и с грузами m и m_1

▲ **Решение. Что происходит.** Газ под поршнем при постоянной температуре сжимается грузами: каждый груз добавляет давление $\Delta p = \Delta m\, g / S$ (S — площадь поршня). При постоянной T давление газа обратно пропорционально его объёму (закон Бойля — Мариотта), поэтому уменьшение объёма в n раз означает увеличение давления в n раз. Давление газа в каждом состоянии находим из равновесия поршня: оно равно давлению снаружи (атмосфера и вес поршня) плюс давление грузов. Главная идея — выразить давление через начальное p и вычитанием состояний исключить неизвестные атмосферное давление и массу поршня.

Обозначения. p, V — давление и объём газа без грузов; S — площадь поршня; m_1 — искомая масса второго груза. Состояния: 1 — без грузов, 2 — с грузом m, 3 — с грузами m и m_1.

1. Связь давления и объёма. Количество вещества ν и температура T газа постоянны, поэтому из уравнения Клапейрона — Менделеева $pV =$

νRT следует: $pV = \text{const}$ во всех трёх состояниях. Если объём равен V/n, давление равно np. Выражаем всё через p: состояние 1 — V и p; состояние 2 — $V/3$ и $3p$; состояние 3 — $V/6$ и $6p$ (объём уменьшился ещё в 2 раза).

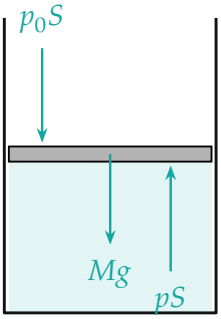


Изотерма: три состояния и добавленные грузы

2. Равновесие поршня. Запишем условие равновесия поршня с грузами в проекции на вертикальную ось: сила давления газа снизу уравновешивает силу давления атмосферы, вес поршня и вес грузов. Для давления это значит

$$p_{\text{газа}} = p_{\text{внеш}} + \frac{Mg}{S},$$

где M — масса грузов и поршня, $p_{\text{внеш}}$ — давление над поршнем. Нам нужна только разность давлений между состояниями: она определяется лишь добавленным грузом, потому что остальные слагаемые (атмосфера и вес поршня) не меняются. Зачем вычитать: так пропадают неизвестные $p_{\text{внеш}}$ и масса поршня.



поршень с грузами, масса M

газ

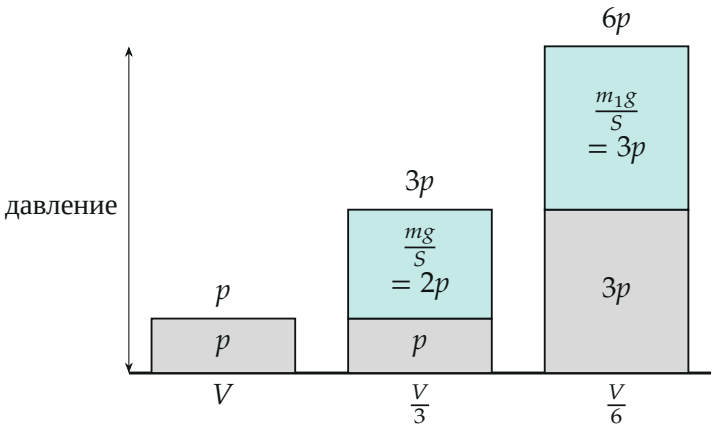
Силы, действующие на поршень: давление атмосферы, вес и давление газа

3. Первый груз. Между состояниями 1 и 2 добавлен груз m:

$$3p - p = \frac{mg}{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{mg}{S} = 2p.$$

4. Второй груз. Между состояниями 2 и 3 добавлен груз m_1:

$$6p - 3p = \frac{m_1 g}{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1 g}{S} = 3p.$$

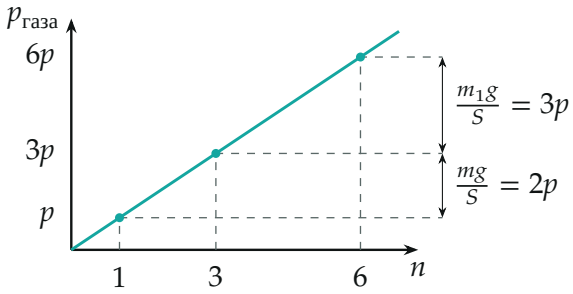


Давление газа в трёх состояниях: каждый груз добавляет своё давление

5. Отношение масс. Разделим уравнение пункта 4 на уравнение пункта 3: S, g и p сокращаются:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{3p}{2p} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{3}{2}\,m.$$

6. Второй способ — через график. Давление газа пропорционально степени сжатия $n = V/V'$: $p_{\text{газа}} = np$, график — прямая, проходящая через начало координат. Масса груза пропорциональна добавленному давлению, то есть добавленному n: первый груз увеличил n от 1 до 3 (на 2), второй — от 3 до 6 (на 3). Отсюда $m_1/m = 3/2$.



Давление газа растёт пропорционально степени сжатия; добавки давления пропорциональны массам грузов

Обратите внимание: m_1 — дополнительный груз сверх m, а не весь груз на поршне. Всего на поршне лежит $m + m_1 = \frac{5}{2}m$, и именно он создаёт добавку давления $5p$ (от p до $6p$).

Проверка. Размерность: m_1/m — безразмерное отношение. Общая формула для сжатия в n раз грузом m и ещё в k раз грузом m_1:

$$m_1 = \frac{n(k-1)}{n-1}\,m.$$

При $k = 1$ получаем $m_1 = 0$ (дальше сжимать не надо). При $n \to \infty$ (давление груза много больше остальных) $m_1 \to (k-1)m$: давление пропорционально массе груза.

Ответ. $m_1 = \frac{3}{2}\,m.$