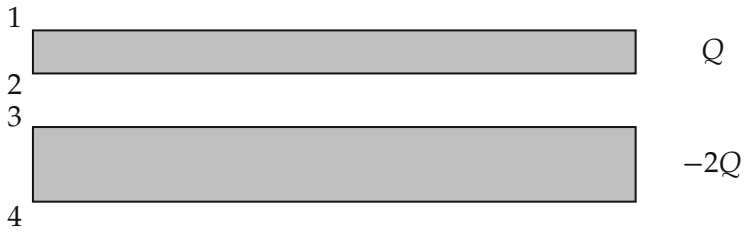
Заряды поверхностей пластин

Задача 4. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Две большие металлические пластины зарядили зарядами Q и $-2Q$ и расположили параллельно друг другу. Считая, что размеры пластин гораздо больше их толщины и расстояния между ними, найти заряды поверхностей пластин 1, 2, 3 и 4 — q_1, q_2, q_3 и q_4 (см. рисунок).



▲ **Решение. Что происходит.** Заряд проводящей пластины перераспределяется между её двумя поверхностями так, чтобы внутри металла поле стало равно нулю. Пластины большие, поэтому каждая заряженная поверхность создаёт однородное поле, и поле в любой точке — сумма полей четырёх заряженных плоскостей (принцип суперпозиции). Условий два: сохранение заряда на каждой пластине и $E = 0$ внутри каждой пластины. Это классическая задача на проводники в электростатике: неизвестны четыре заряда, уравнений четыре.

Обозначения. S — площадь пластины, ε_0 — электрическая постоянная. Ось x направим вниз, от пластины с зарядом Q к пластине с зарядом $-2Q$. Поле бесконечной плоскости с зарядом q по модулю равно $q/(2\varepsilon_0 S)$ и направлено от плоскости при $q > 0$: в точке ниже плоскости проекция на ось x равна $+\dfrac{q}{2\varepsilon_0 S}$, в точке выше — $-\dfrac{q}{2\varepsilon_0 S}$.

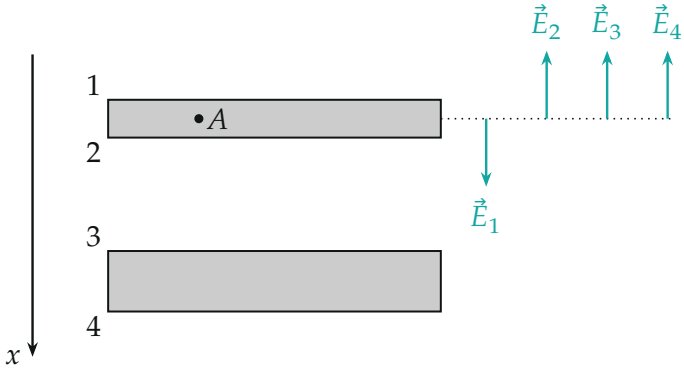
1. Сохранение заряда. Заряд пластины остаётся на ней, поэтому сумма зарядов двух её поверхностей равна заряду пластины:

$$q_1 + q_2 = Q, \qquad q_3 + q_4 = -2Q.$$

2. Поле внутри первой пластины. Выберем точку A внутри первой

пластины. Поверхность 1 лежит выше неё и даёт проекцию $+\dfrac{q_1}{2\varepsilon_0 S}$, поверхности 2, 3 и 4 лежат ниже и дают $-\dfrac{q_2}{2\varepsilon_0 S}$, $-\dfrac{q_3}{2\varepsilon_0 S}$, $-\dfrac{q_4}{2\varepsilon_0 S}$. В металле поле равно нулю:

$$q_1 - q_2 - q_3 - q_4 = 0.$$



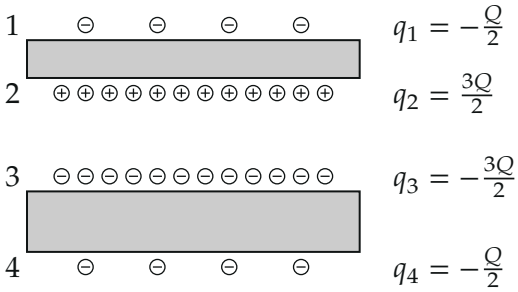
Поля четырёх поверхностей в точке A внутри первой пластины (стрелки нарисованы для положительных зарядов)

3. Поле внутри второй пластины. В точке внутри второй пластины поверхности 1, 2, 3 лежат выше, поверхность 4 — ниже:

$$q_1 + q_2 + q_3 - q_4 = 0.$$

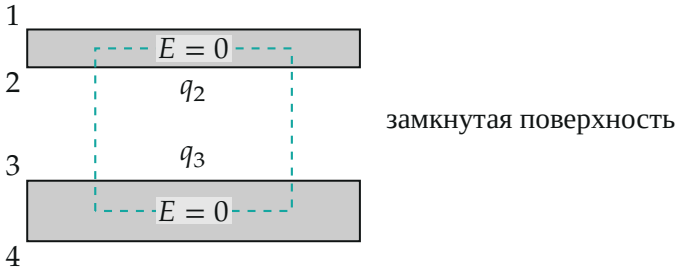
4. Решение системы. Из пункта 1 $q_1 + q_2 = Q$, поэтому уравнение пункта 3 принимает вид $Q + q_3 - q_4 = 0$. Сложим его с $q_3 + q_4 = -2Q$: $Q + 2q_3 = -2Q$, откуда $q_3 = -\dfrac{3Q}{2}$ и $q_4 = -2Q - q_3 = -\dfrac{Q}{2}$. В уравнении пункта 2 заменим $q_2 = Q - q_1$ и $q_3 + q_4 = -2Q$:

$$q_1 - (Q - q_1) + 2Q = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -\frac{Q}{2}, \qquad q_2 = Q - q_1 = \frac{3Q}{2}.$$



Заряды поверхностей: на внутренних поверхностях заряды больше и противоположны по знаку

5. Второй способ. Сложим и вычтем уравнения пунктов 2 и 3. Вычитание даёт $q_2 + q_3 = 0$: заряды обращённых друг к другу поверхностей противоположны. Это следует и из теоремы Гаусса: возьмём замкнутую поверхность, обе грани которой лежат внутри металла, где $E = 0$; поток через неё равен нулю, значит, заряд внутри $q_2 + q_3 = 0$. Сложение даёт $q_1 = q_4$: внешние поверхности несут одинаковый заряд. Их сумма $q_1 + q_4 = Q + (-2Q) - (q_2 + q_3) = -Q$, поэтому $q_1 = q_4 = -Q/2$, $q_2 = Q - q_1 = 3Q/2$, $q_3 = -3Q/2$. Ответы совпадают.

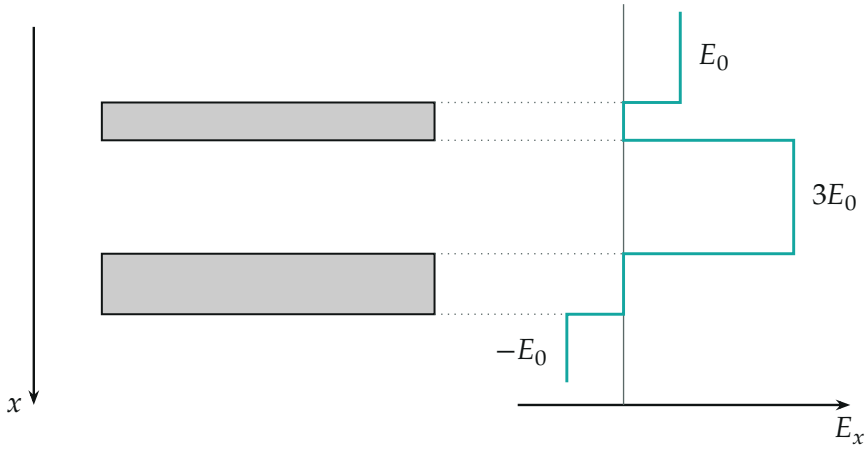


Замкнутая поверхность с гранями внутри металла: поток равен нулю, значит $q_2 + q_3 = 0$

Обратите внимание: заряд пластины — сумма зарядов двух её поверхностей, поэтому у первой пластины не $Q/2$ на каждой поверхности: из-за второй пластины заряды перераспределились, $q_2 = 3Q/2$.

Поле в трёх областях. Для проверки найдём поле в областях вне металла; обозначим $E_0 = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$. Выше пластин все четыре поверхности

лежат ниже точки, $E_x = -\dfrac{q_1+q_2+q_3+q_4}{2\varepsilon_0 S} = E_0$. Между пластинами $E_x = \dfrac{q_1+q_2-q_3-q_4}{2\varepsilon_0 S} = 3E_0$. Ниже пластин $E_x = \dfrac{q_1+q_2+q_3+q_4}{2\varepsilon_0 S} = -E_0$. Всюду поле направлено к пластинам, как и должно быть у системы с суммарным зарядом $-Q$.



Проекция поля на ось x: вне металла E_0, между пластинами $3E_0$, снизу $-E_0$, внутри пластин нуль

Проверка. Размерность: $q_i \sim Q$. Сумма зарядов $-\dfrac{Q}{2}+\dfrac{3Q}{2}-\dfrac{3Q}{2}-\dfrac{Q}{2} = -Q$ — равна полному заряду системы. Поле между пластинами по теореме Гаусса для поверхности вблизи обращённой к зазору поверхности второй пластины: $E = \dfrac{|q_3|}{\varepsilon_0 S} = \dfrac{3Q}{2\varepsilon_0 S} = 3E_0$ — совпадает. Общий случай зарядов Q_1 и Q_2 даёт $q_1 = q_4 = \dfrac{Q_1+Q_2}{2}$, $q_2 = -q_3 = \dfrac{Q_1-Q_2}{2}$; при $Q_2 = -Q_1$ внешних зарядов нет, весь заряд на обращённых друг к другу поверхностях, как в плоском конденсаторе.

Ответ. $q_1 = -\dfrac{Q}{2}$, $q_2 = \dfrac{3Q}{2}$, $q_3 = -\dfrac{3Q}{2}$, $q_4 = -\dfrac{Q}{2}$.