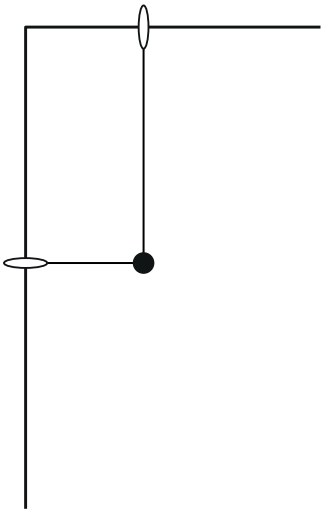
Бусинка на нити между кольцами

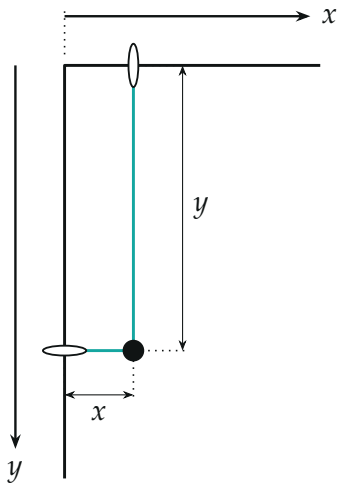
Задача 5. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Два стержня соединены в форме буквы «Г». Один из стержней расположен горизонтально, другой вертикально. На стержни надеты маленькие невесомые колечки, которые могут без трения перемещаться по стержням. К колечкам прикреплена невесомая нить. На нить надета массивная бусинка, которая может без трения перемещаться по нити. В начальный момент бусинку удерживают так, что нить натянута, длина ее горизонтального участка l, вертикального $2l$. Бусинку отпускают. Найти ее ускорение. Через какое время бусинка достигнет вертикального стержня?



▲ **Решение. Что происходит.** Кольца невесомые, а стержни гладкие, поэтому сила нити на каждое кольцо обязана быть перпендикулярна своему стержню: иначе невесомое кольцо получило бы бесконечное ускорение. Значит, участок нити у кольца на горизонтальном стержне всё время вертикален, а у кольца на вертикальном стержне — горизонтален. Бусинка скользит по нити без трения, поэтому натяжение T одинаково по всей нити. Длина нити постоянна, и это жёстко задаёт траекторию бусинки — прямую. Остаётся записать второй закон Ньютона вдоль этой

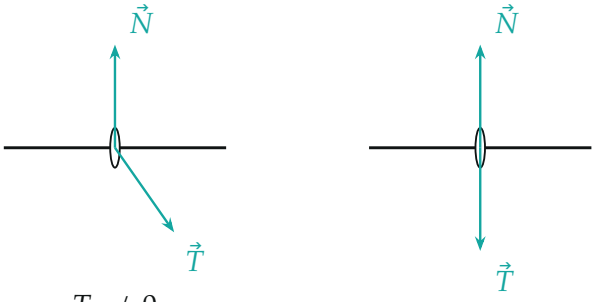
прямой. Это задача на идеальную нить и кольца: связь определяет траекторию, а ускорение — проекция силы тяжести на неё.

Обозначения. В произвольный момент x — длина горизонтального участка нити, y — длина вертикального участка; координаты бусинки отсчитываем от угла «Г»: x вдоль горизонтального стержня, y вдоль вертикального (вниз). Начало: $x = l$, $y = 2l$. m — масса бусинки, T — натяжение нити, a — ускорение бусинки.



Произвольный момент: бусинка на расстоянии x от вертикального стержня и y ниже горизонтального

1. Положение нити. Запишем второй закон Ньютона для невесомого кольца на горизонтальном стержне: $m_{\text{кол}}\vec{a} = \vec{T} + \vec{N}$, где $\vec{N}$ — сила стержня, перпендикулярная стержню (трения нет), а $m_{\text{кол}} \to 0$. Тогда $\vec{T} + \vec{N} = 0$, то есть $\vec{T}$ перпендикулярна стержню, и участок нити вертикален. Те же слова для кольца на вертикальном стержне дают горизонтальный участок нити.



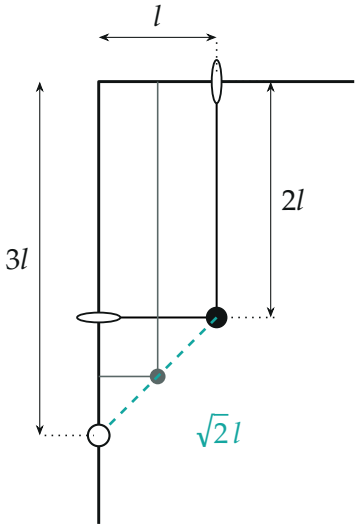
Слева — нить под углом: составляющая T_x ничем не уравновешена. Справа — нить перпендикулярна стержню: $\vec{T} + \vec{N} = 0$

2. Нерастяжимость нити. Нить состоит из вертикального участка длиной y и горизонтального длиной x (бусинка на нити не меняет её длину), и их сумма постоянна. В начале она равна $l + 2l = 3l$:

$$x + y = 3l.$$

3. Траектория. Бусинка движется по прямой $y = 3l - x$: приращения координат связаны равенством $\Delta y = -\Delta x$, бусинка смещается вниз и влево на равные величины, то есть под углом 45° к горизонту. Вертикального стержня она достигнет при $x = 0$, то есть при $y = 3l$: смещение по каждой оси равно l, длина пути

$$s = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2}\,l.$$

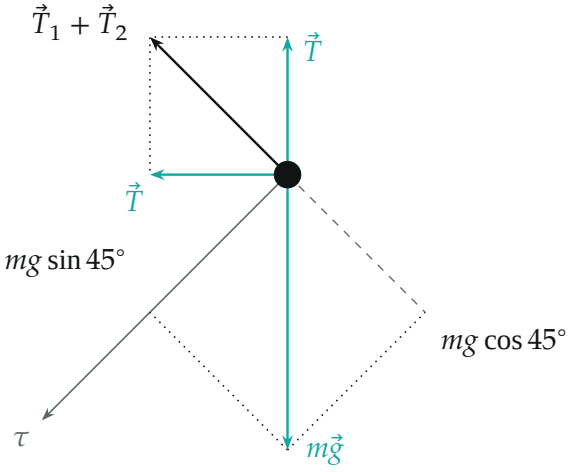


Траектория бусинки — прямая под 45°; серым показано одно из промежуточных положений нити

4. Силы на бусинку и ускорение. На бусинку действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и две силы натяжения по T: вверх (по вертикальному участку) и влево (по горизонтальному). Их сумма равна $T\sqrt{2}$ и направлена вдоль диагонали квадрата — перпендикулярно траектории. Выберем ось τ вдоль траектории (вниз и влево): тогда натяжения нить не дают проекции, и неизвестное T не понадобится. Запишем второй закон Ньютона для бусинки в проекции на ось τ:

$$ma = mg\sin 45^\circ \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}g.$$

Проекция на перпендикулярное направление даёт $T\sqrt{2} = mg\cos 45^\circ$, откуда $T = mg/2 > 0$: нить действительно натянута.



Силы на бусинку: сумма натяжений перпендикулярна траектории, вдоль неё работает только $m\vec{g}$

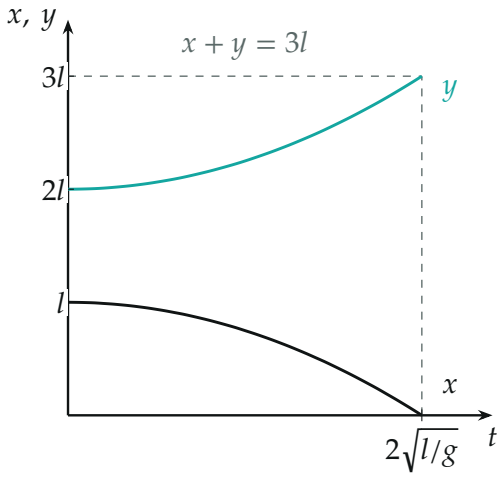
Второй способ: энергия. Бусинка опускается на l (от $y = 2l$ до $y = 3l$), натяжения работы не совершают: они перпендикулярны движению. Поэтому $\dfrac{mv^2}{2} = mgl$, $v^2 = 2gl$. С другой стороны, при равноускоренном движении по пути s из состояния покоя $v^2 = 2as = 2\sqrt{2}\,la$. Отсюда $a = \dfrac{g}{\sqrt{2}}$ — тот же ответ.

Обратите внимание: ускорение бусинки меньше g и не вертикально: нить удерживает её по вертикали и тянет влево, поэтому бусинка уходит под 45°, а не падает вниз.

5. Время. Начальная скорость равна нулю, движение равноускоренное по пути $s = \sqrt{2}\,l$:

$$\sqrt{2}\,l = \frac{at^2}{2} = \frac{gt^2}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{4l}{g}, \qquad t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Проекции на оси: $x = l - \dfrac{gt^2}{4}$, $y = 2l + \dfrac{gt^2}{4}$. При $t = 2\sqrt{l/g}$ получаем $x = 0$, $y = 3l$, а сумма $x + y$ всё время равна $3l$.



Длины участков нити: x уменьшается, y растёт, их сумма постоянна

Проверка. Размерность: $a \sim g$, $t \sim \sqrt{l/g}$. Третий способ — по осям: горизонтально $ma_x = T$, вертикально $ma_y = mg - T$ (вниз), связь $x + y = \text{const}$ даёт $a_x = a_y$, откуда $T = mg/2$, $a_x = a_y = g/2$, $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g/\sqrt{2}$ — совпадает. Смысл: тяжесть тянет вниз с силой mg, а нить забирает половину по вертикали и добавляет ту же половину по горизонтали.

Ответ. $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} g$ (вдоль прямой под 45° к вертикальному стержню); $t = 2\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.