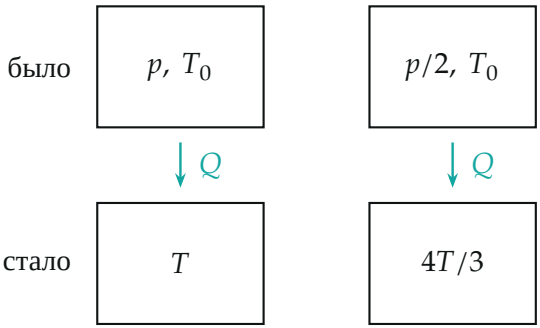
Нагрев газа в двух сосудах

Задача 1. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 1] В двух одинаковых сосудах содержится одноатомный идеальный газ. Температуры газов в сосудах одинаковы, а давления отличаются в два раза. Газам сообщают одинаковые количества теплоты, и газ в одном сосуде нагревается до абсолютной температуры T, в другом — до абсолютной температуры $4T/3$. Найти начальную температуру газов. Изменением объёма сосудов при нагревании пренебречь.



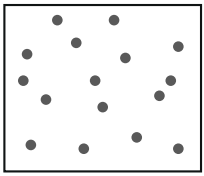
Поясняющий рисунок: два одинаковых сосуда, объём каждого V; в оба сообщают одно и то же количество теплоты Q

▲ **Решение. Что происходит.** Объём сосудов не меняется, поэтому газы работу не совершают и вся теплота идёт на увеличение внутренней энергии: процесс изохорный. Сосуды одинаковы, температуры одинаковы, а давления различаются вдвое — значит, *газа в сосудах разное количество*: молекул в сосуде с меньшим давлением вдвое меньше. Теплоту поделили поровну, поэтому там, где газа меньше, температура вырастет сильнее. Это видно и в условии: $4T/3 > T$. Главная идея задачи — записать первое начало термодинамики для каждого сосуда и приравнять теплоты.

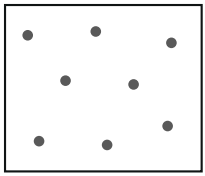
Обозначения. T_0 — начальная температура обоих газов (её нужно найти); V — объём каждого сосуда; p и $p/2$ — начальные давления; ν_1, ν_2 — количества вещества в сосудах с давлением p и $p/2$; Q — теплота, сообщённая каждому газу; R — газовая постоянная.

1. Соотношение количеств вещества. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для начального состояния каждого газа. Объём и температура у них одинаковы, поэтому можно разделить одно уравнение на другое и избавиться от неизвестных V и T_0:

$$pV = \nu_1 RT_0, \qquad \frac{p}{2}V = \nu_2 RT_0 \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = \frac{\nu_1}{2}.$$



$\nu_1,\ p$



$\nu_2 = \nu_1/2,\ p/2$

При одинаковых V и T давление пропорционально числу молекул: в сосуде с давлением $p/2$ молекул вдвое меньше

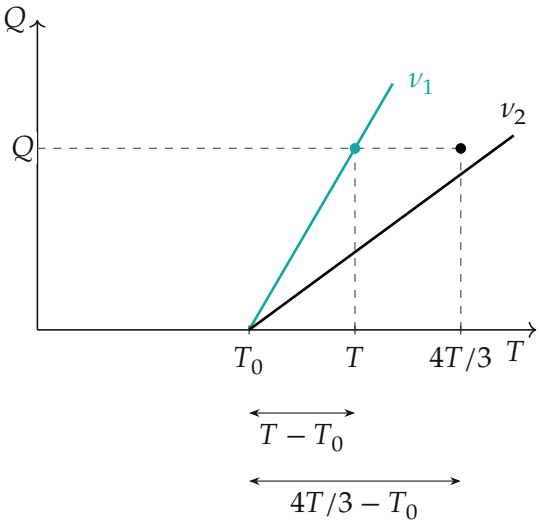
2. Первое начало термодинамики для каждого газа. Объём не меняется, поэтому работа газа $A = p\,\Delta V = 0$ и вся теплота идёт на изменение внутренней энергии. Для одноатомного идеального газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$, так что $Q = \Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T$. Для первого и второго сосудов:

$$Q = \frac{3}{2}\,\nu_1 R\,(T - T_0), \qquad Q = \frac{3}{2}\,\frac{\nu_1}{2}\,R\left(\frac{4T}{3} - T_0\right).$$

Обратите внимание: в обоих сосудах теплота одна и та же, а количества вещества разные. Поэтому приравнивать нужно именно теплоты Q, а не изменения температуры.

3. Равенство теплот. Левые части равны, значит равны и правые. Неизвестными остались только T_0 и T; общий множитель $\frac{3}{2}\nu_1 R$ сокращается:

$$T - T_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4T}{3} - T_0\right) \;\Rightarrow\; 2T - 2T_0 = \frac{4T}{3} - T_0 \;\Rightarrow\; T_0 = \frac{2}{3}\,T.$$



Теплота как функция температуры: $Q = \frac{3}{2}\nu R\,(T - T_0)$ — прямая, наклон пропорционален количеству вещества. У второго газа наклон вдвое меньше, поэтому при той же Q его температура растёт вдвое больше

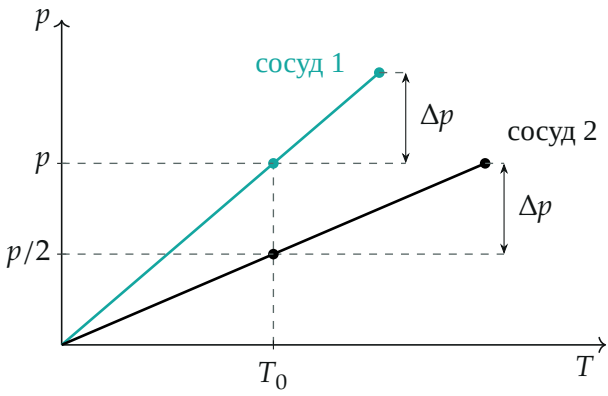
Тот же результат даёт геометрия графика: при одинаковой высоте Q горизонтальные отрезки от T_0 относятся как обратные наклоны, то есть $(4T/3 - T_0) : (T - T_0) = 2 : 1$.

4. Второй способ: через давление. Для изохорного процесса $\nu R\,\Delta T = V\,\Delta p$, поэтому $Q = \frac{3}{2}V\,\Delta p$. Одинаковая теплота при одинаковом объёме означает одинаковое *приращение давления* в обоих сосудах. На диаграмме p–T изохоры — прямые через начало координат (при равных V и T_0 наклон у второго вдвое меньше). Приращения давления:

$$\Delta p_1 = p\left(\frac{T}{T_0} - 1\right), \qquad \Delta p_2 = \frac{p}{2}\left(\frac{4T}{3T_0} - 1\right),$$

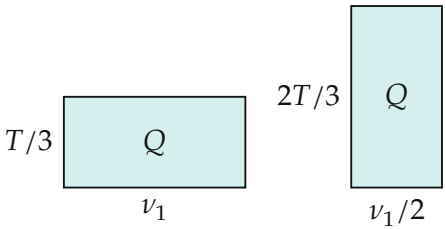
$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \;\Rightarrow\; \frac{T}{T_0} - 1 = \frac{2T}{3T_0} - \frac{1}{2},$$

откуда $\frac{T}{3T_0} = \frac{1}{2}$ и $T_0 = \frac{2T}{3}$. Ответ совпал.



Изохорный нагрев на диаграмме p–T: при одинаковой теплоте одинаково и приращение давления Δp

Проверка. Подставим $T_0 = 2T/3$: первый газ нагрелся от $2T/3$ до T, то есть на $\Delta T_1 = T/3$, второй — от $2T/3$ до $4T/3$, на $\Delta T_2 = 2T/3$. Количества вещества относятся как $2:1$, значит $\nu_1 \Delta T_1 = \nu_1 T/3$ и $\nu_2 \Delta T_2 = \dfrac{\nu_1}{2} \cdot \dfrac{2T}{3} = \nu_1 T/3$ — равны, равны и теплоты. Размерность: T_0 выражена через T безразмерным множителем $2/3$. Знак: $T_0 < T$, так и должно быть при нагреве.



Теплота пропорциональна площади «количество вещества × рост температуры»: у двух газов площади равны (в одном случае широко и невысоко, в другом — узко и высоко)

Физический смысл. Чем меньше в сосуде газа, тем меньше энергии нужно на градус нагрева. Газ во втором сосуде вдвое легче по количеству вещества, поэтому для той же теплоты он нагревается вдвое сильнее: на $2T/3$ вместо $T/3$.

Ответ. $T_0 = \dfrac{2}{3} T$.