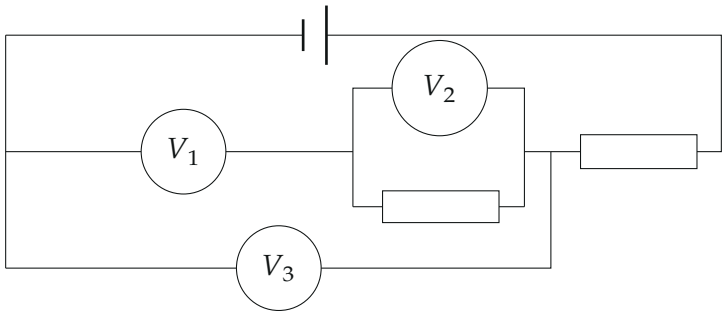
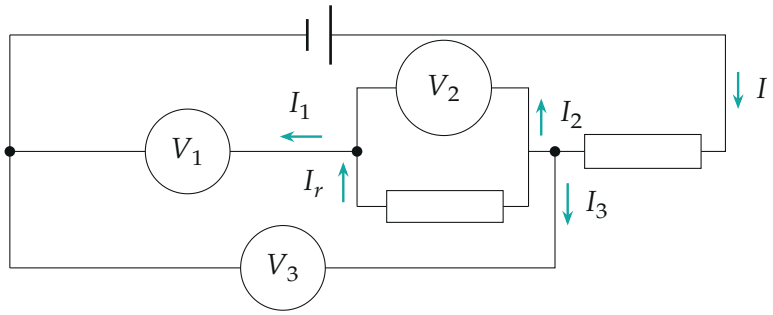
Три вольтметра в цепи

Задача 2. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Электрическая цепь (см. рис.) содержит идеальный источник, три одинаковых вольтметра и два одинаковых резистора. Известно, что показания вольтметра V_1 отличаются от показаний вольтметра V_2 в три раза, а вольтметр V_3 показывает напряжение $V_3 = 10$ В. Чему равно напряжение источника?



▲ **Решение.** **Что происходит.** Вольтметр — это резистор с большим сопротивлением, и показывает он напряжение на самом себе: $U = IR$. Поэтому показания вольтметров несут информацию о токах: у одинаковых вольтметров напряжения относятся как токи. Через V_1 течёт весь ток параллельного участка, а на самом участке он делится между V_2 и резистором, так что через V_2 течёт меньший ток — и его показание меньше. Цепочка решения такая: показания → контур → отношение сопротивлений → токи → напряжение источника. Это цепь постоянного тока, в которой вольтметры нельзя считать идеальными: ток через них не равен нулю.

Обозначения. R — сопротивление каждого вольтметра, r — каждого резистора; U_1, U_2, U_3 — показания V_1, V_2, V_3; I_1, I_2, I_3 — токи через вольтметры, I_r — через резистор, параллельный V_2, I — ток источника; U — напряжение источника. Узлы: O — левая сторона цепи (к ней присоединены V_1, V_3 и источник), A — левый узел параллельного участка, B — узел, где сходятся V_3, правый резистор и параллельный участок. Идеальный источник: его напряжение не зависит от тока.



Токи в цепи: ток I источника идёт через правый резистор и в узле B делится на I_3 (через V_3) и I_1 (через параллельный участок и V_1)

1. Какой вольтметр показывает больше. Вольтметр V_1 и параллельный участок соединены последовательно, поэтому через V_1 течёт весь ток участка, а на участке он делится: часть идёт через V_2, часть — через резистор. По закону сохранения заряда для узла A (сколько втекает, столько вытекает) $I_1 = I_2 + I_r$. Значит $I_2 < I_1$, и так как R у вольтметров одинаково, $U_2 = I_2R < I_1R = U_1$. Поэтому

$$U_1 = 3U_2.$$

Обратите внимание: «отличаются в три раза» само по себе допускает и $U_2 = 3U_1$, но этот вариант невозможен — ток через V_2 есть только часть тока I_1.

2. Напряжения. Напряжение между узлами O и B одно, каким путём ни идти. Напрямую оно равно показанию V_3, а путь через V_1 и параллельный участок складывается из напряжений на них (на параллельном участке — напряжение U_2 вольтметра V_2, оно же напряжение на резисторе):

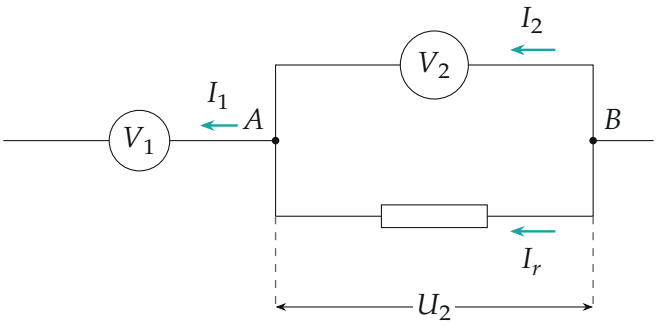
$$U_3 = U_1 + U_2 = 3U_2 + U_2 = 4U_2 \;\Rightarrow\; U_2 = \frac{U_3}{4} = 2{,}5\,\text{В}, \qquad U_1 = 7{,}5\,\text{В}.$$

3. Отношение сопротивлений. Запишем закон Ома для V_1, V_2 и резистора и сложим токи в узле A (сумма токов, втекающих в узел, равна

сумме вытекающих):

$$\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + \frac{U_2}{r} \Rightarrow \frac{3}{R} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{2}{R} = \frac{1}{r} \Rightarrow R = 2r.$$

Сопротивление вольтметра вдвое больше сопротивления резистора. Попутно видим физику: через резистор течёт ток вдвое больший, чем через V_2: $I_r = U_2/r = 2U_2/R = 2I_2$.



Параллельный участок между узлами A и B: на вольтметре V_2 и на резисторе одно и то же напряжение U_2, а токи I_2 и I_r в сумме дают I_1

4. Токи. Теперь все токи выражаются через U_3 и R. По закону Ома для вольтметров

$$I_3 = \frac{U_3}{R}, \qquad I_1 = \frac{U_1}{R} = \frac{3}{4} I_3, \qquad I_2 = \frac{U_2}{R} = \frac{1}{4} I_3, \qquad I_r = \frac{U_2}{r} = \frac{1}{2} I_3.$$

Источник даёт ток $I = I_3 + I_1 = \frac{7}{4} I_3 = \frac{U_3 + U_1}{R}$: в узле B он делится на I_3 и I_1.

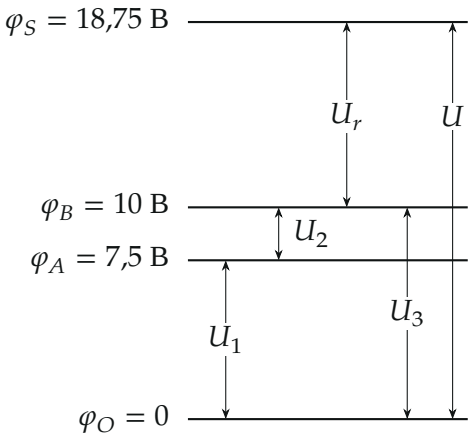
5. Напряжение источника. Весь ток I течёт через правый резистор, поэтому напряжение на нём

$$U_r = Ir = \frac{r}{R}(U_3 + U_1) = \frac{1}{2} \cdot 17{,}5 \text{ В} = 8{,}75 \text{ В}.$$

Источник, правый резистор и V_3 образуют замкнутый контур (второе правило Кирхгофа) по пути «плюс источника → резистор → узел B →

V_3 → узел O → минус источника», поэтому напряжение источника складывается из напряжений на резисторе и на V_3:

$$U = U_r + U_3 = 10\text{ В} + 8{,}75\text{ В} = 18{,}75\text{ В} = \frac{75}{4}\text{ В}.$$



Потенциалы узлов относительно узла O (в вольтах): $U_1 = 7{,}5$, $U_2 = 2{,}5$, $U_3 = 10$, $U_r = 8{,}75$ и напряжение источника $U = 18{,}75$

Проверка (второй способ — через эквивалентное сопротивление). С учётом $R = 2r$ найдём сопротивление всей цепи по шагам. Параллельный участок (V_2 и резистор), затем последовательно с ним V_1, затем эта ветвь параллельно V_3, затем последовательно правый резистор:

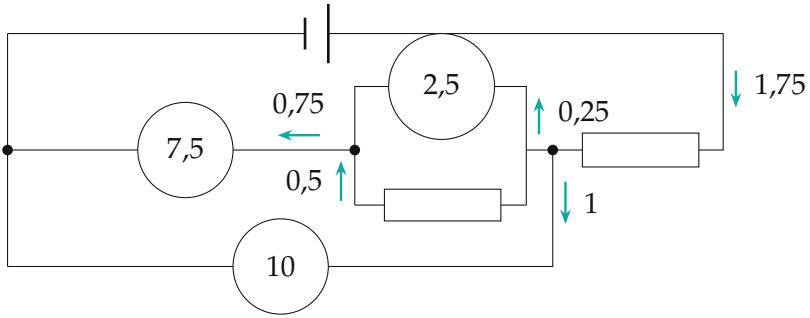
$$R_{AB} = \frac{R \cdot r}{R + r} = \frac{2r}{3}, \qquad R_1 = R + R_{AB} = \frac{8r}{3},$$

$$R_{OB} = \frac{R \cdot R_1}{R + R_1} = \frac{8r}{7}, \qquad R_{\text{полн}} = r + \frac{8r}{7} = \frac{15r}{7}.$$

Напряжение источника делится между правым резистором и участком OB пропорционально сопротивлениям, на участке OB напряжение U_3:

$$U_3 = U\,\frac{R_{OB}}{R_{\text{полн}}} = \frac{8}{15}\,U \;\Rightarrow\; U = \frac{15}{8} \cdot 10\text{ В} = 18{,}75\text{ В}.$$

Ответ тот же. Баланс токов в узле A тоже сходится: $I_1 = I_2 + I_r = \frac{1}{4}I_3 + \frac{1}{2}I_3 = \frac{3}{4}I_3$.



Итоговая картина: показания вольтметров в вольтах (внутри кружков) и токи в единицах $I_0 = U_3/R$ (I — ток источника)

Предельные случаи. Из пункта 3 общее выражение $U_1/U_2 = 1 + R/r$. Если вольтметр V_2 сопротивляется много меньше резистора ($R \ll r$), почти весь ток I_1 идёт через V_2 и $U_1 \approx U_2$. Если $R \gg r$, ток уходит в резистор, а через V_2 почти не идёт, и $U_1 \gg U_2$. Отношение 3 лежит между этими пределами и означает $R = 2r$. Размерность: все величины — напряжения в вольтах.

Физический смысл. Вольтметры в этой цепи — полноценные резисторы. Показание V_3 — это $8/15$ напряжения источника, а остальные $7/15$ падают на правом резисторе.

Ответ. $U = \dfrac{75}{4}$ В $= 18{,}75$ В (по пути: $R = 2r$, $U_1 = 7{,}5$ В, $U_2 = 2{,}5$ В).