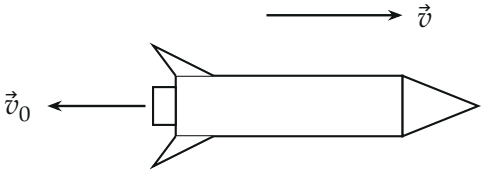
# Ракета с максимальной энергией

**Задача 3.** [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Ракета движется с работающим двигателем так, что массовый расход топлива постоянен, а скорость выброшенных газов относительно ракеты равна $v_0$. При какой скорости ракеты её кинетическая энергия максимальна?




*Поясняющий рисунок: ракета движется со скоростью $\vec{v}$ относительно неподвижной системы отсчёта, газы выбрасываются назад со скоростью $\vec{v}_0$ относительно ракеты*

▲ **Решение. Что происходит.** Двигатель выбрасывает назад газ, ракета получает тягу и разгоняется, но при этом теряет массу. Кинетическая энергия $K = mv^2/2$ зависит от двух меняющихся величин: скорость $v$ растёт, масса $m$ убывает. Сначала выигрыш от скорости перевешивает, потом убыль массы начинает «перевешивать» — значит, у $K$ есть максимум. Главная идея — найти $dK/dt$ и приравнять её нулю. Это задача на экстремум функции времени, где закон сохранения импульса даёт нужную связь $m\,dv = \ldots$ Внешних сил (тяготения, сопротивления) в условии нет, считаем их равными нулю.

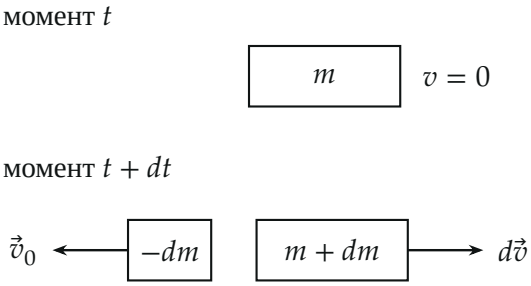
**Обозначения.** $m$ — масса ракеты в данный момент, $v$ — её скорость в неподвижной системе отсчёта, $\mu = -dm/dt > 0$ — постоянный массовый расход топлива (за $dt$ масса ракеты убывает на $\mu\,dt$), $v_0$ — скорость газов относительно ракеты. Ось направим по скорости ракеты.

**1. Производная кинетической энергии.** Дифференцируем по времени $K = mv^2/2$ как произведение двух меняющихся величин:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{v^2}{2}\frac{dm}{dt} + mv\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu v^2}{2} + mv\frac{dv}{dt}.$$

Обратите внимание: первое слагаемое — от убыли массы, оно отрицательно. Если считать массу постоянной, получится $dK/dt = mv\,dv/dt > 0$ и «максимума» не будет вовсе.

**2. Ускорение ракеты из закона сохранения импульса.** Рассмотрим малый промежуток $dt$ и перейдём в инерциальную систему отсчёта, в которой ракета в момент $t$ покоится (за $dt$ скорость ракеты меняется на малую $dv$, поэтому такая система годится). Зачем: так начальный импульс системы «ракета + газ, который будет выброшен» равен нулю, и не нужно следить за скоростью $v$.




*Малый промежуток $dt$ в системе отсчёта, где ракета в момент $t$ неподвижна: ракета получает скорость $d\vec{v}$, а выброшенный газ массой $-dm = \mu\,dt$ улетает со скоростью $v_0$ назад*

За время $dt$ масса ракеты станет $m+dm$ ($dm < 0$), а скорость — $dv$. Выброшенный газ массой $-dm = \mu\,dt$ имеет скорость $-v_0$ относительно ракеты, то есть $-v_0 + dv \approx -v_0$ в этой системе (поправка второго порядка малости). Система замкнутая, и закон сохранения импульса вдоль оси:

$$0 = (m + dm)\,dv + (-dm)(-v_0) \;\Rightarrow\; m\,dv = -v_0\,dm = v_0\mu\,dt.$$

Член $dm\,dv$ — второго порядка малости, его отбросили. Отсюда $m\,dv/dt = \mu v_0$: произведение массы на ускорение равно тяге $\mu v_0$. Тот же результат даёт закон сохранения импульса прямо в неподвижной системе: до $mv$, после $(m+dm)(v+dv)+(-dm)(v-v_0)$ — и после раскрытия скобок снова $m\,dv = -v_0\,dm$. Скорость газа в неподвижной

системе $v - v_0$ — сумма скорости ракеты и скорости газа относительно ракеты.

**3. Подставляем.** Из пунктов 1 и 2

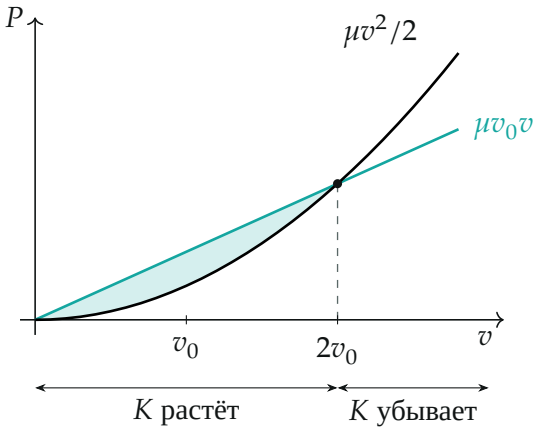
$$\frac{dK}{dt} = -\frac{\mu v^2}{2} + \mu v_0 v = \mu v\left(v_0 - \frac{v}{2}\right).$$

Физический смысл слагаемых: $\mu v_0 v$ — мощность тяги ($F = \mu v_0$, $P = Fv$), а $\mu v^2/2$ — кинетическая энергия, которую ракета теряет вместе с выбрасываемым топливом (каждая порция топлива до выброса двигалась вместе с ракетой).

**4. Условие максимума.** Скорость ракеты растёт со временем ($m\,dv/dt = \mu v_0 > 0$), поэтому «максимум по времени» — это максимум по скорости. Производная равна нулю при $v = 0$ (начало разгона из покоя) и при $v = 2v_0$. Знак производной: при $0 < v < 2v_0$ скобка положительна, $K$ растёт; при $v > 2v_0$ отрицательна, $K$ убывает. Значит при

$$v = 2v_0$$

кинетическая энергия ракеты максимальна.




*Мощности в единицах $\mu v_0^2$: прямая — мощность тяги, парабола — потеря энергии с уходящей массой. Заливка — разность, то есть $dK/dt$; она положительна до $v = 2v_0$*

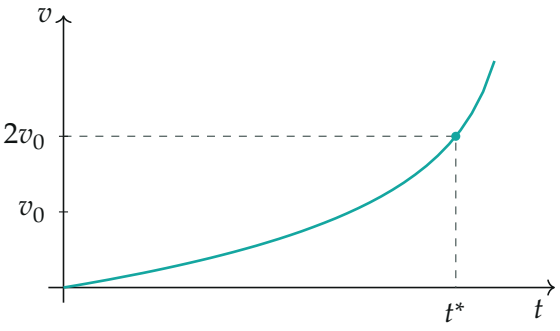
**5. Второй способ: энергия как функция скорости.** Пусть ракета стартует из покоя и других сил нет. Из $m\,dv = -v_0\,dm$ получаем $dm/m = -dv/v_0$; суммируя от начала до данного момента, $\ln(m/m_0) = -v/v_0$, то есть

$$m = m_0 e^{-v/v_0}, \qquad K(v) = \frac{m_0}{2}\,v^2 e^{-v/v_0}.$$

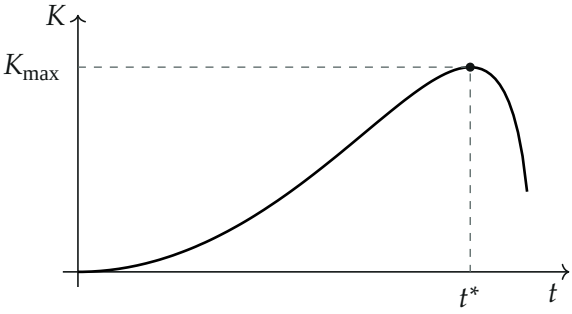
Производная по $v$:

$$\frac{dK}{dv} = \frac{m_0}{2}\,e^{-v/v_0}\left(2v - \frac{v^2}{v_0}\right) = 0 \quad \text{при} \quad v = 2v_0,$$

и это максимум (до него $K$ растёт, после убывает). Тот же ответ, причём здесь $K$ записана через скорость явно: максимальное значение $K_{\max} = 2m_0v_0^2/e^2$.




*Скорость ракеты от времени, $v = v_0 \ln(m_0/(m_0 - \mu t))$: растёт всё быстрее, потому что масса убывает и ускорение $\mu v_0/m$ растёт; уровень $2v_0$ пересечён в момент $t^*$*




*Кинетическая энергия от времени: растёт до момента $t^*$, когда $v = 2v_0$, потом убывает*

**Проверка.** Размерность: $[\mu v^2] = \text{кг/с} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = \text{Вт}$, и $[\mu v_0 v]$ — тоже; $v = 2v_0$ имеет размерность скорости. Предел: при $v \ll v_0$ потерей энергии с массой можно пренебречь, $dK/dt \approx \mu v_0 v$ — мощность тяги, всё идёт в энергию ракеты. Численная проверка (интегрирование $m\,dv = \mu v_0\,dt$ с шагом $10^{-5}$, $K = mv^2/2$) даёт максимум при $v = 1{,}9999\,v_0$.

**Физический смысл.** При $v < 2v_0$ мощность тяги $\mu v_0 v$ больше потери энергии с уходящей массой $\mu v^2/2$, и ракета набирает энергию; при $v > 2v_0$ потеря становится больше, и энергия убывает. При $v = 2v_0$ скорость выброшенных газов в неподвижной системе равна $v - v_0 = v_0$ и направлена вперёд: «ракета» движется быстрее газа.

**Ответ.** $v = 2v_0$.