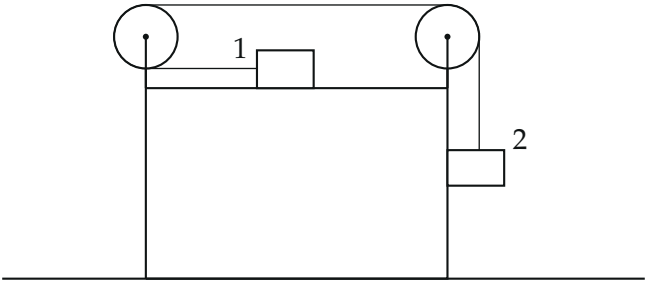
Тела и блоки на кубе

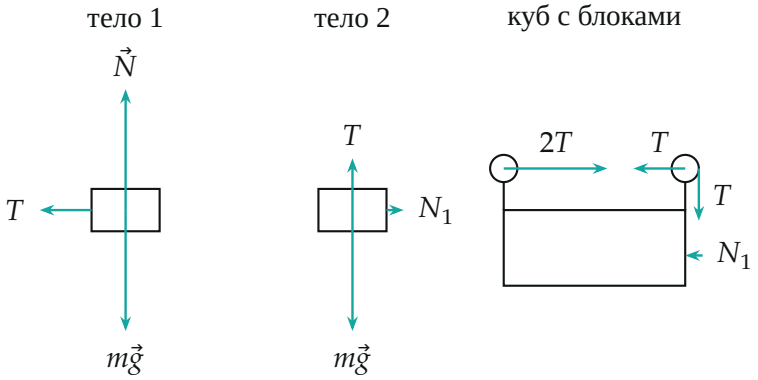
Задача 4. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Имеется два тела одинаковой массы m и куб вдвое большей массы. Тела связывают нитью, которую пропускают через систему блоков, установленных на кубе. Найти ускорение тела 2. Трения нет ни на каких поверхностях, нить невесома и нерастяжима. Массой блоков можно пренебречь. «Геометрия» системы такова, что при вертикальном расположении участка нити, прикреплённого к телу 2, оно касается боковой грани куба, а нить, прикреплённая к телу 1, горизонтальна.



▲ **Решение. Что происходит.** Тело 2 тяжёлое и тянет нить вниз. Нить заставляет тело 1 ехать влево, а куб с блоками сдвигается вправо: нить тянет блоки на кубе. Внешних горизонтальных сил на всю систему нет, поэтому тела разъезжаются так, что горизонтальный импульс остаётся нулевым. Тело 2 прижато к правой грани куба, поэтому едет вниз u вместе с кубом вправо. Значит, ускорение тела 2 — вектор с двумя составляющими. Класс задачи: связанные тела на подвижной опоре. План: второй закон Ньютона для каждого тела, затем связи ускорений (нить нерастяжима, тело 2 касается куба), затем решение системы шести уравнений.

Обозначения. Масса куба nm, $n = 2$. Ускорения: a_1 — тела 1 (направлено влево), a_3 — куба (вправо), $a_{2г}$ и $a_{2в}$ — горизонтальная (вправо) и вертикальная (вниз) составляющие ускорения тела 2. T — сила натяжения нити, N_1 — сила, с которой куб давит на тело 2. Блоки безмассовые и без трения, поэтому натяжение одинаково во всех участках нити. Система отсчёта — неподвижная (земля), оси: горизонтальная вправо, вертикальная вниз.

1. Силы и второй закон Ньютона. Рассмотрим каждое тело отдельно: так на олимпиаде проще не потерять силу.



Силы по горизонтали и вертикали, действующие на тела 1, 2 и на куб с блоками (вертикальные силы, действующие на куб, и опора не показаны: они ускорения куба не меняют)

Тело 1. Вертикальные силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ уравновешены, по горизонтали действует только T влево. Второй закон Ньютона в проекции на горизонталь:

$$ma_1 = T.$$

Тело 2. Силы: натяжение вверх, сила тяжести вниз, реакция грани куба вправо. В проекциях:

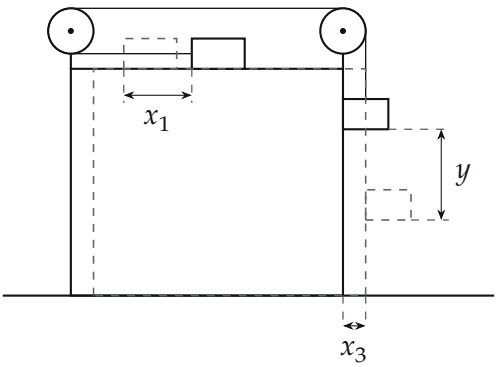
$$ma_{2\text{в}} = mg - T, \qquad ma_{2\text{г}} = N_1.$$

Куб с блоками. Блоки безмассовые, поэтому силы нити на блоки целиком передаются кубу. На левый блок оба участка нити (идущие к телу 1 и вдоль верха куба) действуют вправо: $2T$. На правый блок верхний участок действует влево, T, а вертикальный — вниз (по горизонтали ничего не даёт). Тело 2 давит на куб влево с N_1 (третий закон Ньютона). Для куба в проекции на горизонталь:

$$nma_3 = 2T - T - N_1 = T - N_1.$$

Обратите внимание: на куб от нити действует не T, а $2T$ на левом блоке и T на правом, с разными знаками. Итоговая горизонтальная сила нити на куб — T вправо.

2. Связи между ускорениями. Первая связь: тело 2 касается куба и не отстаёт от него по горизонтали, поэтому $a_{2г} = a_3$. Вторая связь — из нерастяжимости нити.



За малое время тело 1 смещается влево на x_1, куб — вправо на x_3 (штрих — новые положения); участок нити от тела 1 до левого блока укорачивается на $x_1 + x_3$, и тело 2 опускается относительно куба на $y = x_1 + x_3$

Длина нити постоянна, и верхний участок между блоками не меняется (блоки неподвижны относительно куба). Участок слева укоротился на $x_1 + x_3$ — значит, правый участок, идущий к телу 2, на столько же удлинился, и тело 2 опустилось на $y = x_1 + x_3$. Куб по вертикали не движется, поэтому y — вертикальное смещение тела 2 и в земной системе. Дифференцируя связь дважды, получаем связь ускорений:

$$a_1 + a_3 = a_{2в}.$$

3. Решаем систему. Неизвестных шесть ($a_1, a_3, a_{2г}, a_{2в}, T, N_1$) и уравнений шесть. Подставим $T = ma_1$ и $N_1 = ma_{2г} = ma_3$ в уравнение куба:

$$nma_3 = ma_1 - ma_3 \;\Rightarrow\; a_1 = (n+1)\,a_3, \qquad a_{2в} = a_1 + a_3 = (n+2)\,a_3.$$

Осталось уравнение тела 2 по вертикали: $ma_{2в} = mg - ma_1$, то есть

$(n+2)a_3 = g - (n+1)a_3$. Отсюда

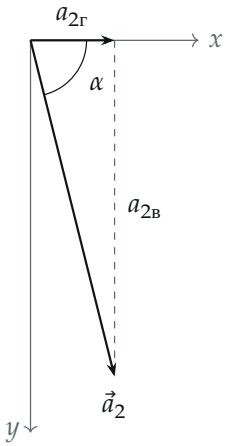
$$a_3 = \frac{g}{2n+3}, \qquad a_{2г} = \frac{g}{2n+3}, \qquad a_{2в} = \frac{(n+2)\,g}{2n+3}.$$

Для $n = 2$: $a_{2г} = \frac{g}{7}$, $a_{2в} = \frac{4g}{7}$; заодно $a_1 = \frac{3g}{7}$, $T = \frac{3mg}{7}$, $N_1 = \frac{mg}{7} > 0$ — тело 2 действительно прижато к кубу.

4. Полное ускорение тела 2. Составляющие перпендикулярны, поэтому

$$a_2 = \sqrt{a_{2г}^2 + a_{2в}^2} = \frac{g\sqrt{n^2+4n+5}}{2n+3} = \frac{\sqrt{17}}{7}\,g \approx 0{,}59\,g.$$

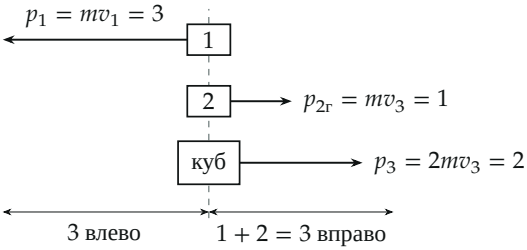
Вектор направлен вниз и вправо под углом α к горизонтали, $\operatorname{tg}\alpha = a_{2в}/a_{2г} = n+2 = 4$, то есть $\alpha = \operatorname{arctg} 4 \approx 76°$.



Ускорение тела 2: составляющие $a_{2г} = g/7$ и $a_{2в} = 4g/7$ (в масштабе), угол $\alpha = \operatorname{arctg} 4$ с горизонтом

5. Второй способ: сохранение горизонтального импульса. Внешних горизонтальных сил на систему «тело 1 + тело 2 + куб» нет, и вначале всё покоилось, поэтому в любой момент сумма горизонтальных импульсов равна нулю: $-mv_1 + mv_{2г} + nmv_3 = 0$. Так как $v_{2г} = v_3$,

получаем $v_1 = (n+1)v_3$ — то же $a_1 = (n+1)a_3$, но без сил. Дальше, как в пункте 3, остаётся уравнение тела 2.



Горизонтальные импульсы при $n = 2$ в масштабе, в единицах mv_3: тело 1 — 3 влево, тело 2 — 1 вправо, куб — 2 вправо; влево и вправо поровну, сумма равна нулю

Проверка. Размерность: $a_2 \sim g$. Предел: $n \to \infty$ (куб неподвижен): $a_{2г} \to 0$, $a_{2в} \to g/2$ — известный ответ для двух грузов равной массы на нити через блок. Второй способ — энергия. Ускорения постоянны, начальные скорости нулевые, значит $v_3 = v_{2г} = a_3 t$, $v_1 = 3a_3 t$, $v_{2в} = 4a_3 t$ при $n = 2$. Кинетическая энергия системы

$$K = \tfrac{1}{2}m(3a_3t)^2 + \tfrac{1}{2}m(a_3t)^2 + \tfrac{1}{2}m(4a_3t)^2 + \tfrac{1}{2}(2m)(a_3t)^2 = 14\,ma_3^2t^2,$$

а мощность силы тяжести тела 2 равна $mg \cdot 4a_3t$ (остальные силы работы не совершают — трения нет, нить и блоки идеальны). Приравнивая $dK/dt = 28\,ma_3^2t$ мощности $4mga_3t$, получаем $a_3 = g/7$, как и раньше.

Физический смысл. Нить тянет блоки, и куб уезжает вправо, увлекая за собой тело 2, которое касается его грани. Чем тяжелее куб, тем меньше он разгоняется и тем ближе движение тела 2 к вертикальному: $a_{2г}/a_{2в} = 1/(n+2) \to 0$ при $n \to \infty$. Лёгкий куб, наоборот, заметно увлекает тело 2 вбок.

Ответ. $a_2 = \dfrac{\sqrt{17}}{7}\,g \approx 0{,}59\,g$; вектор ускорения направлен вниз и вправо под углом $\operatorname{arctg} 4 \approx 76°$ к горизонту ($a_{2г} = g/7$, $a_{2в} = 4g/7$).