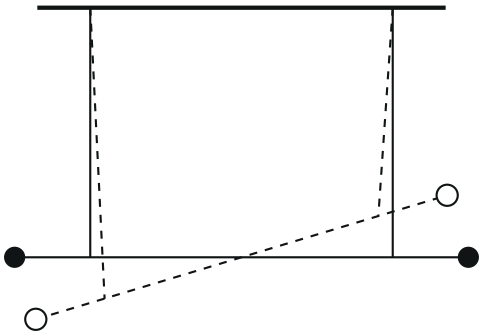
Крутильные колебания стержня на нитях

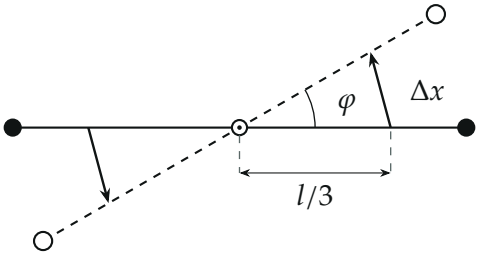
Задача 5. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Стержень длиной l, на концах которого закреплены два одинаковых маленьких тела массой m, подвешен на двух вертикальных нитях длиной h. Расстояние между нитями $\dfrac{2l}{3}$, нити прикреплены симметрично относительно центра тяжести стержня, стержень горизонтален. Стержень поворачивают на малый угол вокруг вертикальной оси и отпускают. Найти частоту малых колебаний стержня.



▲ **Решение. Что происходит.** Это крутильный маятник на двух нитях. При повороте стержня вокруг вертикальной оси точки крепления нитей смещаются в стороны, нити наклоняются, и стержень с грузами чуть поднимается. Поднятые грузы стремятся вернуться вниз — возникает возвращающий момент. Подъём получается пропорциональным квадрату угла, как энергия пружины пропорциональна квадрату растяжения, поэтому колебания гармонические. Главная идея — записать энергию через угол поворота φ: $K = \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2$ и $\Pi = \frac{1}{2}B\varphi^2$, тогда $\omega^2 = B/A$. Класс задачи: малые колебания консервативной системы с одной степенью свободы.

Обозначения. φ — угол поворота стержня от положения равновесия, $\dot{\varphi}$ — угловая скорость. Ось вращения вертикальна и проходит через середину стержня. Массу стержня и нитей в условии не задают, считаем их пренебрежимо малыми по сравнению с $2m$. ω — круговая частота

малых колебаний, $\nu = \omega/2\pi$ — частота. Углы φ и отклонения нитей малы.



Вид сверху: сплошной стержень — равновесие, штриховой — повёрнутый на угол φ (угол для наглядности увеличен). Верхние концы нитей остаются на месте, нижние сместились на $\Delta x \approx l\varphi/3$

1. Почему энергии имеют такой вид. Потенциальная энергия имеет минимум при $\varphi = 0$ и не зависит от знака угла, поэтому разложение начинается с φ^2: $\Pi = \frac{1}{2}B\varphi^2$. Кинетическая энергия — сумма $\frac{1}{2}mv^2$ по грузам, а скорости пропорциональны $\dot\varphi$, поэтому $K = \frac{1}{2}A\dot\varphi^2$. Закон сохранения механической энергии: $\frac{1}{2}A\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}B\varphi^2 = \text{const}$. Продифференцируем по времени и сократим на $\dot\varphi$: $A\ddot\varphi = -B\varphi$, то есть гармонические колебания с

$$\omega^2 = \frac{B}{A}.$$

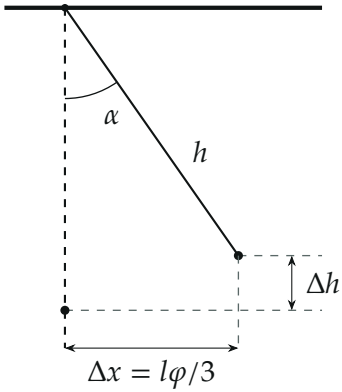
Теперь нужно найти A и B.

2. Геометрия: на сколько поднимается стержень. Нижние концы нитей лежат на расстоянии $l/3$ от оси (половина расстояния между нитями). При повороте на малый угол φ каждый из них сдвигается по дуге, то есть почти перпендикулярно стержню, на

$$\Delta x \approx \frac{l}{3}\varphi,$$

а верхние концы остаются на месте. Нить длиной h отклоняется от вертикали на малый угол α, для которого $\sin\alpha \approx \alpha \approx \Delta x/h$:

$$\alpha = \frac{l\varphi}{3h}.$$



Вид сбоку на одну нить: нижний конец сместился на Δx, нить отклонилась на угол α, а конец поднялся на Δh (углы на рисунке преувеличены)

Вертикальная нить имеет длину h, отклонённая — тоже h, но её нижний конец оказался выше. Подъём каждого конца и всего стержня:

$$\Delta h = h\,(1-\cos\alpha) \approx \frac{h\alpha^2}{2} = \frac{l^2\varphi^2}{18h}.$$

Здесь использовано $\cos\alpha \approx 1-\alpha^2/2$ (применимо при малых α).

Обратите внимание: смещение Δx пропорционально φ, а подъём — уже φ^2. Поэтому в энергии остаётся только φ^2, и именно из-за этого колебания гармонические.

3. Потенциальная энергия. Оба груза и стержень поднимаются на Δh, потенциальная энергия растёт на

$$\Pi = 2mg\,\Delta h = \frac{mgl^2}{9h}\,\varphi^2 \;\Rightarrow\; B = \frac{2mgl^2}{9h}.$$

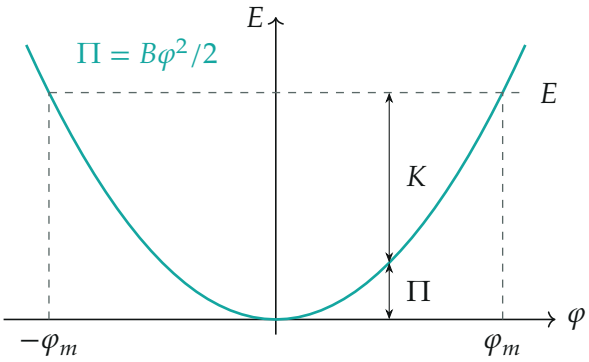
4. Кинетическая энергия. Каждый груз находится на расстоянии $l/2$ от оси и движется по дуге со скоростью $v = l\dot\varphi/2$. Вертикальная скорость грузов пропорциональна $\varphi\dot\varphi$, это малая второго порядка, ею пренебрегаем. Поэтому

$$K = 2\cdot\frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2}{4}\,\dot\varphi^2 \;\Rightarrow\; A = \frac{ml^2}{2}$$

(это момент инерции двух грузов $2m(l/2)^2$ относительно оси).

5. Частота. Подставим A и B:

$$\omega^2 = \frac{B}{A} = \frac{2mgl^2}{9h} \cdot \frac{2}{ml^2} = \frac{4g}{9h} \Rightarrow \omega = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{h}}, \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{3\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}.$$



Потенциальная энергия — парабола $\Pi(\varphi)$, полная энергия E постоянна: в точке поворота $\pm\varphi_m$ вся энергия потенциальная, в положении равновесия — кинетическая; между ними $K = E - \Pi$

6. Второй способ: моменты сил. Нить действует на груз силой натяжения T, а вертикально груз удерживается, поэтому $T \approx mg$ для каждой нити. Горизонтальная составляющая натяжения направлена вдоль отклонённой нити к её верхнему концу, то есть к исходному положению нижнего конца, и равна

$$F = T\sin\alpha \approx mg\,\alpha = \frac{mgl\varphi}{3h}.$$

Она перпендикулярна стержню и стремится вернуть его назад; плечо относительно оси — $l/3$. Для двух нитей момент возвращающих сил

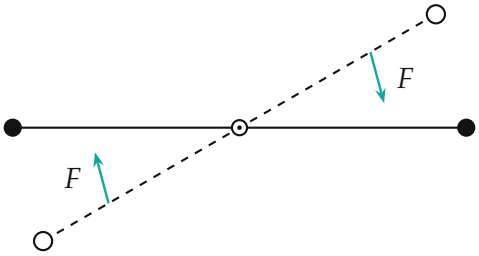
$$M = -2F \cdot \frac{l}{3} = -\frac{2mgl^2}{9h}\,\varphi.$$

Основное уравнение вращательного движения $I\ddot{\varphi} = M$ с $I = 2m(l/2)^2 =$

$ml^2/2$ даёт

$$\ddot{\varphi} = -\frac{4g}{9h}\,\varphi.$$

Отсюда тот же $\omega^2 = 4g/(9h)$; видно, что B — коэффициент возвращающего момента, а A — момент инерции.



Вид сверху: горизонтальные составляющие F сил натяжения нитей направлены к верхним концам нитей и создают момент, возвращающий стержень

Проверка. Размерность: $\sqrt{g/h}$ измеряется в с^{-1}. Если вместо $l/3$ взять расстояние от оси до нити a, то аналогично $\omega = (2a/l)\sqrt{g/h}$. При $a = l/2$ (нити прикреплены прямо к грузам) получаем $\omega = \sqrt{g/h}$ — частота обычного маятника длиной h, как и должно быть; при $a \to 0$ нити сходятся к оси, возвращающего момента нет и $\omega \to 0$. Для $a = l/3$ имеем $\omega = \frac{2}{3}\sqrt{g/h}$. Численная проверка: интегрирование точных уравнений движения для $l = 0{,}6\,\text{м}$, $h = 1\,\text{м}$, $g = 9{,}81\,\text{м/с}^2$ даёт $\omega = 2{,}088\,\text{с}^{-1}$, формула — $2{,}088\,\text{с}^{-1}$.

Физический смысл. Колебания медленнее, чем у обычного маятника длиной h, в полтора раза: нити близки к оси, поэтому поворот стержня поднимает грузы слабо, а возвращающий момент мал по сравнению с моментом инерции.

Ответ. Круговая частота $\omega = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{g}{h}}$, частота $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{3\pi}\sqrt{\dfrac{g}{h}}$.