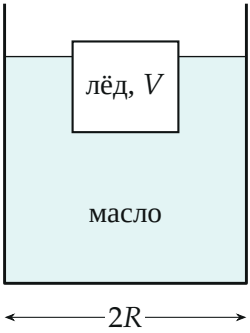
Лёд, тающий в масле

Задача 1. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 1] В цилиндрический сосуд радиуса R налито синтетическое масло, в котором плавает кусочек «водяного» льда, не касаясь дна и стенок. Объём кусочка V. Изменится ли уровень масла в сосуде, когда кусочек льда растает, и если да, то на сколько? Известно, что плотность воды $\rho_в$ больше плотности масла $\rho_м$. Плотность льда $\rho_л$.



Поясняющий рисунок: льдинка плавает в масле, не касаясь дна и стенок

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на плавающее тело и уровень жидкости. Уровень масла в цилиндре определяется тем, сколько объёма занимают масло и всё, что погружено в него: льдинка вытесняет масло объёмом своей погружённой части $V_п$. Когда льдинка растает, вода (она плотнее масла) утонет и вытеснит масло объёмом, равным её собственному объёму $V_в$. Значит, ответ даёт сравнение двух объёмов $V_п$ и $V_в$: чей объём больше, тот сильнее поднимал уровень. Два закона нужны, чтобы их найти: условие плавания льдинки и сохранение массы при таянии.

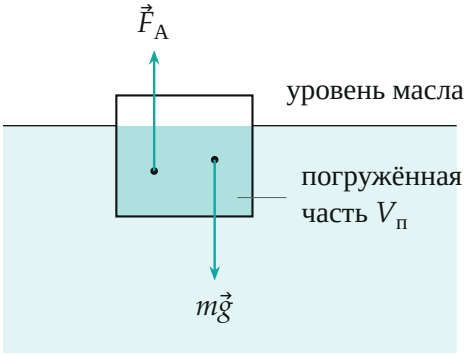
Обозначения. $S = \pi R^2$ — площадь дна сосуда; $m = \rho_л V$ — масса льдинки; $V_м$ — объём масла; H_0 и H_1 — высота уровня масла над дном до и после таяния.

1. Уровень через объёмы. Льдинка не касается дна и стенок, поэтому объём всего, что лежит ниже поверхности масла, равен SH. До таяния

под поверхностью находятся масло и погружённая часть льда, после таяния — масло и вода на дне (она целиком ниже поверхности). Масло не убывает и не прибавляется, не смешивается с водой, значит

$$SH_0 = V_м + V_п, \qquad SH_1 = V_м + V_в \quad \Rightarrow \quad \Delta h = H_1 - H_0 = \frac{V_в - V_п}{S}.$$

Неизвестными остались $V_п$ и $V_в$.



Силы на плавающую льдинку: тяжесть и сила Архимеда уравновешены

2. Объём вытесненного масла до таяния. Льдинка покоится, поэтому по второму закону Ньютона для неё сумма сил равна нулю; в проекции на вертикальную ось вверх

$$F_A - mg = 0, \qquad F_A = \rho_м g V_п, \qquad m = \rho_л V.$$

Сила Архимеда равна весу вытесненного масла, а вытесняет масло только погружённая часть. Отсюда

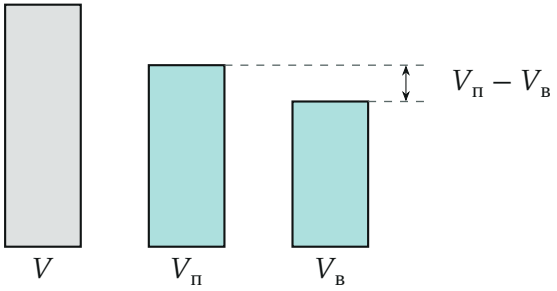
$$\rho_м g V_п = \rho_л g V \quad \Rightarrow \quad V_п = \frac{\rho_л}{\rho_м} V.$$

Здесь $\rho_л < \rho_м$, иначе лёд не плавал бы.

3. Объём вытесненного масла после таяния. При таянии масса не меняется: лёд массой $m = \rho_л V$ становится водой той же массы, $\rho_в V_в = \rho_л V$. Вода плотнее масла, $\rho_в > \rho_м$, поэтому она тонет и растекается по

дну; вытесняет масло она ровно объёмом $V_в$:

$$V_в = \frac{\rho_л}{\rho_в} V.$$

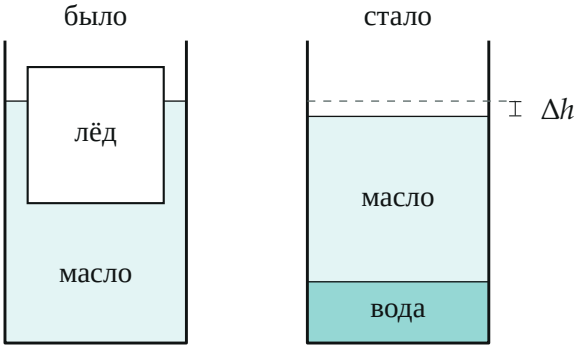


Объёмы масла, вытесненного льдинкой и водой, в долях объёма льда (для наглядности $\rho_л = 0{,}6\rho_в$, $\rho_м = 0{,}8\rho_в$)

4. Сравнение. Из пунктов 2 и 3 при одной и той же массе $\rho_л V$:

$$V_п = \frac{\rho_л V}{\rho_м} \quad \text{и} \quad V_в = \frac{\rho_л V}{\rho_в}.$$

Так как $\rho_м < \rho_в$, то $V_п > V_в$: плавающая льдинка вытесняла больше масла, чем вытесняет вода. Поэтому $\Delta h < 0$: уровень масла *понизится*.



Было и стало (для наглядности $\rho_л = 0{,}6\rho_в$, $\rho_м = 0{,}8\rho_в$; понижение уровня увеличено, пунктир — прежний уровень)

5. Насколько понизится уровень. Подставим $V_\text{п}$ и $V_\text{в}$ в пункт 1:

$$\Delta h = \frac{V_\text{в} - V_\text{п}}{\pi R^2} = -\frac{\rho_\text{л} V}{\pi R^2}\left(\frac{1}{\rho_\text{м}} - \frac{1}{\rho_\text{в}}\right) = -\frac{\rho_\text{л}(\rho_\text{в} - \rho_\text{м})V}{\pi R^2 \rho_\text{в}\rho_\text{м}}.$$

Знак минус: уровень опустился на $|\Delta h|$.

Второй способ: давление на дно. Давление на дно равно весу всего, что лежит в сосуде, делённому на S, а вес не меняется: масса масла и льда (воды) прежняя. До таяния давление на дно создаёт только масло: $\rho_\text{м} g H_0$. После таяния на дне лежит слой воды толщиной $d = V_\text{в}/S$ (в среднем по дну), над ним слой масла толщиной $H_1 - d$:

$$\rho_\text{м} g H_0 = \rho_\text{м} g (H_1 - d) + \rho_\text{в} g d \quad \Rightarrow \quad \Delta h = H_1 - H_0 = -\frac{\rho_\text{в} - \rho_\text{м}}{\rho_\text{м}}\, d,$$

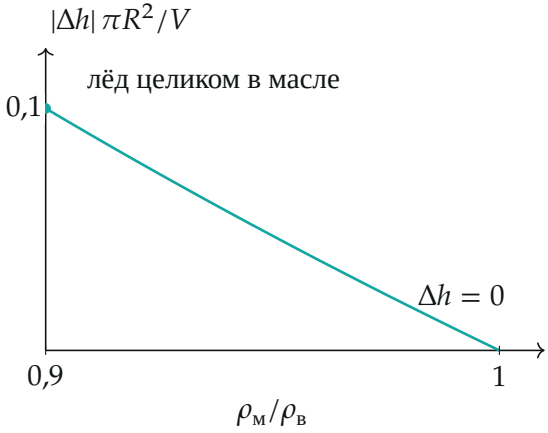
и после подстановки $d = V_\text{в}/S = \rho_\text{л} V/(\rho_\text{в} S)$ получаем

$$\Delta h = -\frac{(\rho_\text{в} - \rho_\text{м})\rho_\text{л} V}{\rho_\text{м}\rho_\text{в} S}.$$

Тот же результат.

Обратите внимание: на уровень влияет только *погружённая* часть льдинки $V_\text{п}$, а не весь её объём V и не выступающая над маслом часть.

Обратите внимание и на второе: вывод $V_\text{п} > V_\text{в}$ опирается на то, что вода тонет ($\rho_\text{в} > \rho_\text{м}$); для масла плотнее воды вода всплыла бы, и сравнивать пришлось бы иначе.



Понижение уровня при $\rho_л = 0{,}9\rho_в$ в зависимости от плотности масла: от 0,1 (лёд целиком под поверхностью) до нуля (масло плотности воды)

Проверка. Размерность: в числителе $(\text{кг/м}^3)^2\cdot\text{м}^3$, в знаменателе $\text{м}^2\cdot(\text{кг/м}^3)^2$, в частном остаются метры. Пределы: если $\rho_м \to \rho_в$, то $\Delta h \to 0$ (масло и вода неотличимы по плотности, нечему менять уровень); если $\rho_м \to \rho_л$, льдинка полностью под поверхностью, $V_п = V$ и уровень падает лишь на сжатие льда в воду, $|\Delta h| = (V - V_в)/S$ — график выше.

Для примера: $\rho_л = 900$, $\rho_м = 950$, $\rho_в = 1000$ кг/м^3, $V = 50$ см^3, $R = 4$ см дают $|\Delta h| \approx 0{,}47$ мм.

Смысл: лёд плавает за счёт масла, а вода тонет за счёт своего веса, и объём, который занимает лёд под поверхностью, больше объёма воды.

Ответ. Уровень масла понизится на $\Delta h = \dfrac{\rho_л(\rho_в - \rho_м)V}{\pi R^2\,\rho_в\rho_м}$.