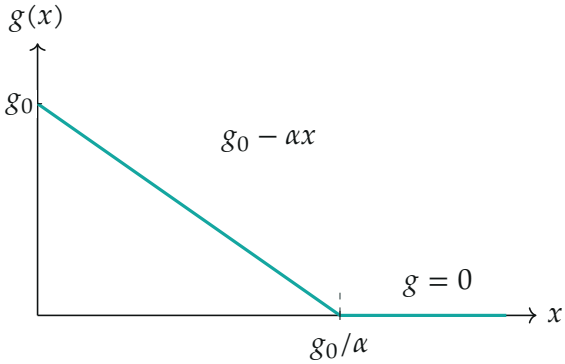
Вторая космическая скорость при g(x)

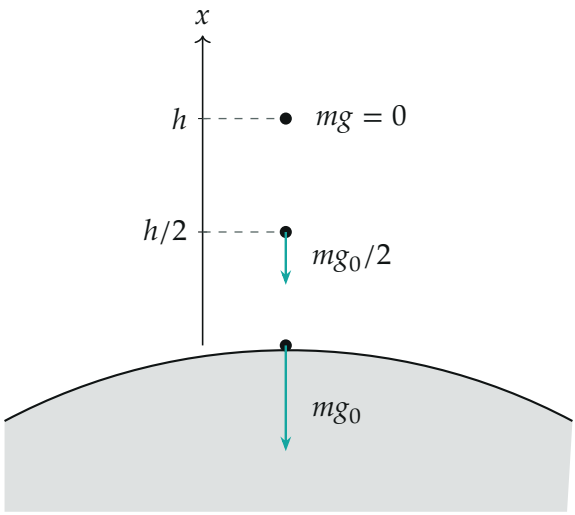
Задача 2. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Ускорение свободного падения на некоторой планете зависит от высоты x от поверхности по закону $g(x) = g_0 - \alpha x$ при $0 < x < g_0/\alpha$ и $g(x) = 0$ при $x > g_0/\alpha$, где g_0 и α — положительные постоянные. Найти вторую космическую скорость для данной планеты.



Поясняющий рисунок: график $g(x)$

▲ **Решение. Что происходит.** Вторая космическая скорость — наименьшая скорость у поверхности, при которой тело навсегда уходит от планеты. Здесь притяжение оканчивается на конечной высоте $h = g_0/\alpha$: выше $g = 0$ и тело не тормозится. Поэтому нужно, чтобы тело дошло до высоты h хотя бы с нулевой скоростью. Ключевой закон — теорема об изменении кинетической энергии, а работа переменной силы тяжести равна площади под графиком $mg(x)$.

Обозначения. m — масса тела; v_0 — его скорость у поверхности (при $x = 0$); $h = g_0/\alpha$ — высота, выше которой притяжения нет. Ось x направлена вверх от поверхности. Вращением планеты, другими телами и сопротивлением пренебрегаем.



Сила притяжения убывает с высотой и на высоте h обращается в нуль (длины стрелок пропорциональны $mg(x)$)

1. Что значит «покинуть планету». Выше $x = h$ силы нет, и скорость тела сохраняется. Значит, тело уйдёт, если дойдёт до высоты h с неотрицательной скоростью. Наименьшая начальная скорость — та, при которой скорость на высоте h как раз стала нулём. Если v_0 меньше, тело остановится ниже h и упадёт назад.

2. Теорема об изменении кинетической энергии для тела на пути от поверхности ($v = v_0$) до высоты h ($v = 0$): изменение кинетической энергии равно работе силы тяжести A (других сил нет):

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

Работу нельзя взять как $-mg_0h$: сила на пути меняется.

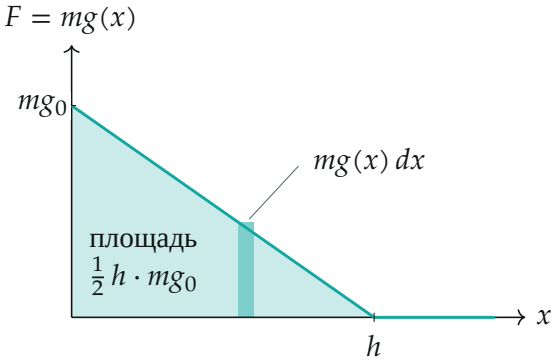
3. Работа переменной силы. Рассмотрим малый участок пути dx: на нём g почти не меняется, и работа силы тяжести $dA = -mg(x)\,dx$ (сила направлена вниз, перемещение вверх). Просуммируем по всем участкам от $x = 0$ до $x = h$:

$$A = -\int_0^h mg(x)\,dx.$$

Интеграл — площадь под графиком силы $mg(x)$ (треугольник с основанием h и высотой mg_0):

$$\int_0^h mg(x)\,dx = \frac{1}{2}\,h\cdot mg_0 = \frac{mg_0^2}{2\alpha} \quad\Rightarrow\quad A = -\frac{mg_0^2}{2\alpha}.$$

Работа отрицательна: тяжесть тормозит тело, кинетическая энергия убывает.



Работа силы тяжести на малом участке dx — площадь узкой полоски; вся работа (со знаком минус) — площадь треугольника

4. Ответ. Подставим A в пункт 2:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mg_0^2}{2\alpha} \quad\Rightarrow\quad v_0 = \frac{g_0}{\sqrt{\alpha}}.$$

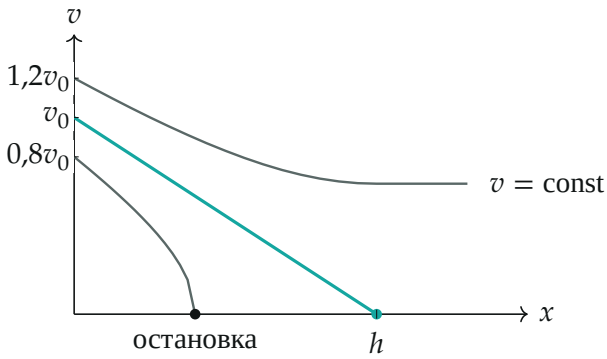
Второй способ: скорость на высоте x. Выразим ускорение через путь: $a = dv/dt = v\,dv/dx$, и второй закон Ньютона даёт

$$v\frac{dv}{dx} = -(g_0 - \alpha x) \quad\Rightarrow\quad \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - g_0 x + \frac{\alpha x^2}{2} \qquad (x \le h).$$

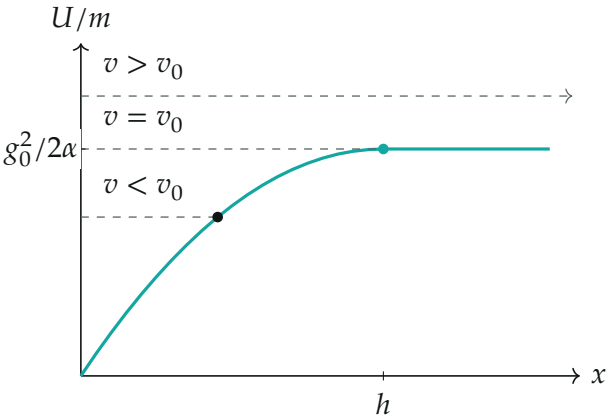
Дополним до квадрата:

$$v^2 = \left(v_0^2 - \frac{g_0^2}{\alpha}\right) + \alpha(h-x)^2.$$

При $v_0 = g_0/\sqrt{\alpha}$ получаем $v = \sqrt{\alpha}\,(h - x)$: скорость убывает до нуля ровно в точке $x = h$ и нигде раньше не обращается в нуль. При v_0 меньше критической скобка отрицательна, и скорость обращается в нуль при $x < h$: тело останавливается и падает. При v_0 больше критической скорость на границе $v = \sqrt{v_0^2 - g_0^2/\alpha} > 0$ и дальше сохраняется.



Скорость в зависимости от высоты при v_0 меньше, равной и больше критической: бирюзовая прямая — $v_0 = g_0/\sqrt{\alpha}$



«Потенциальный барьер»: потенциальная энергия единицы массы U/m растёт до $g_0^2/2\alpha$ и дальше постоянна; пунктир — полная энергия $v_0^2/2$ (при $x = 0$ она равна кинетической). Через барьер уходят только тела с $v_0 \geq g_0/\sqrt{\alpha}$

Обратите внимание: при $v_0 = g_0/\sqrt{\alpha}$ скорость вблизи границы пропорциональна $h-x$, поэтому тело подходит к высоте h бесконечно долго ($x = h(1-e^{-\sqrt{\alpha}\,t})$). Вторая космическая скорость — именно наименьшее значение: при любой скорости чуть больше критической тело уходит за конечное время.

Проверка. Размерность: α — это $[g]/[x]$, то есть с^{-2}, поэтому $g_0/\sqrt{\alpha}$ имеет размерность $(\text{м/с}^2)\cdot\text{с} = \text{м/с}$. Предел: при $\alpha \to 0$ поле однородно на любой высоте, $h \to \infty$ и $v_0 \to \infty$: из однородного поля тело не уйдёт ни с какой скоростью, как и должно быть.

Для примера: $g_0 = 10$ м/с^2 и $\alpha = 10^{-6}$ с$^{-2}$ ($h = 10^4$ км) дают $v_0 = 10$ км/с — порядок как у Земли.

Смысл: $g_0^2/(2\alpha)$ — работа на единицу массы, которую тело должно совершить против притяжения, и она вдвое меньше, чем при постоянной g_0 на высоте h.

Ответ. $v_0 = \dfrac{g_0}{\sqrt{\alpha}}$.