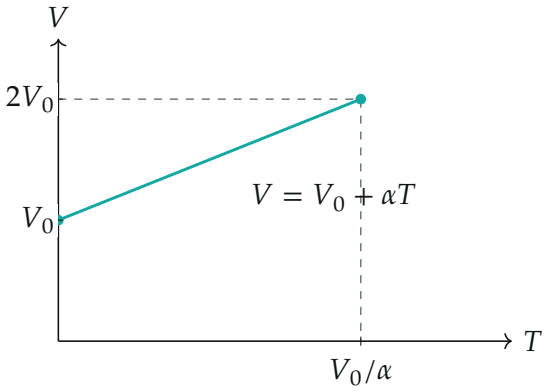
Теплоёмкость гелия при V = V0 + αT

Задача 3. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 3] С одним молем гелия происходит процесс, в котором объём газа зависит от его абсолютной температуры по закону $V = V_0 + \alpha T$, где V_0 и α — положительные постоянные. Объём газа меняется от величины V_0 до величины $2V_0$. Найти максимальную и минимальную теплоёмкость газа в этом процессе.



Поясняющий рисунок: процесс на диаграмме V–T — отрезок прямой от $T = 0$ до $T = V_0/\alpha$

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на теплоёмкость в нестандартном процессе: теплоёмкость — это отношение малого количества теплоты к малому приращению температуры, $C = \delta Q/\Delta T$, и в таком процессе она зависит от того, в каком состоянии находится газ. Поэтому берём малый шаг процесса и записываем для него первое начало термодинамики: $\delta Q = \Delta U + p\,\Delta V$. Приращение объёма связано с приращением температуры условием процесса, а давление находим из уравнения состояния. В итоге C выражается через объём, и остаётся найти её наибольшее и наименьшее значения на отрезке $V_0 \le V \le 2V_0$.

Обозначения. $\nu = 1$ моль; R — газовая постоянная; ΔT, ΔV — малые приращения температуры и объёма на шаге; δQ — сообщённое на шаге количество теплоты; C — теплоёмкость моля газа.

1. Первое начало на малом шаге. Для малого шага запишем первое начало термодинамики для газа: полученная теплота идёт на изменение внутренней энергии и на работу газа,

$$\delta Q = \Delta U + p\,\Delta V.$$

Работа газа на малом шаге — $p\,\Delta V$, потому что давление за шаг почти не меняется: это площадь тонкой полоски на диаграмме p–V (рисунок ниже). Для одного моля одноатомного гелия внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}RT$, поэтому $\Delta U = \frac{3}{2}R\,\Delta T$.

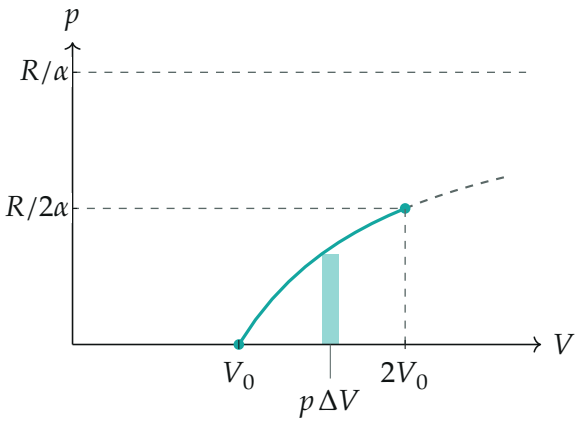
2. Условие процесса для малого шага. Из $V = V_0 + \alpha T$ следует, что при нагревании на ΔT объём растёт на

$$\Delta V = \alpha\,\Delta T.$$

3. Давление. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для моля газа, $pV = RT$, и выразим температуру через объём: $T = (V - V_0)/\alpha$. Тогда

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{R\,(V - V_0)}{\alpha V}.$$

Давление в начале процесса ($V = V_0$, $T = 0$) равно нулю и растёт с объёмом.



Процесс на диаграмме p–V: давление растёт от нуля к $R/2\alpha$; бирюзовая

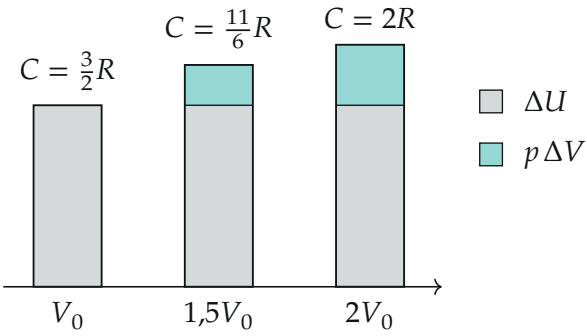
полоска — работа газа на малом шаге; пунктирная кривая — продолжение закона за пределы процесса

4. Теплота и теплоёмкость. Подставим пункты 1–3 в определение $C = \delta Q/\Delta T$:

$$\delta Q = \frac{3}{2}R\,\Delta T + p\,\alpha\,\Delta T,$$

$$C = \frac{3}{2}R + p\alpha = \frac{3}{2}R + R\,\frac{V - V_0}{V} = \frac{5}{2}R - \frac{RV_0}{V}.$$

Первое слагаемое — теплота на нагрев (внутренняя энергия растёт), второе — на работу газа против давления: газ при нагревании получает теплоту, так что $C > 0$.



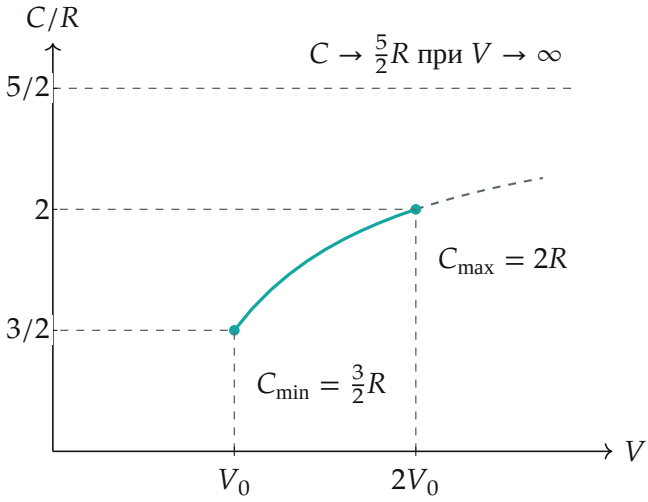
Теплота на малом шаге в единицах $R\,\Delta T$: на внутреннюю энергию всегда 1,5 (серое), на работу — всё больше по мере роста V (бирюзовое); при $V = V_0$ работы нет

5. Наибольшее и наименьшее значения. Функция $C(V)$ монотонно возрастает с объёмом:

$$\frac{dC}{dV} = \frac{RV_0}{V^2} > 0.$$

Чем больше объём, тем выше давление, и тем большая доля теплоты уходит в работу. Значит, на отрезке $V_0 \le V \le 2V_0$ наименьшее значение достигается на левом конце, наибольшее — на правом:

$$C_{\min} = C(V_0) = \frac{3}{2}R, \qquad C_{\max} = C(2V_0) = \frac{5}{2}R - \frac{1}{2}R = 2R.$$

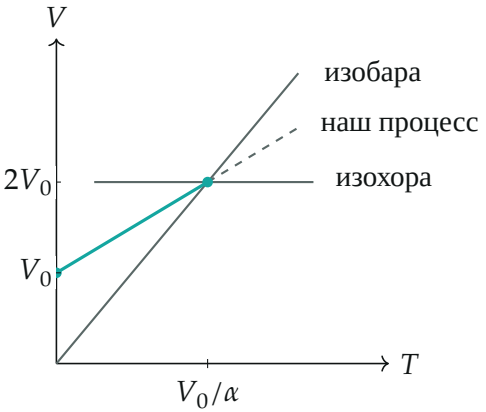


Теплоёмкость газа в процессе: бирюзовая кривая — сам процесс ($V_0 \le V \le 2V_0$), пунктир — та же формула за его пределами

Второй способ: наклон на диаграмме V–T. Работу на шаге можно записать так: $p\,\Delta V = (RT/V)\,\Delta V$, поэтому

$$C = \frac{3}{2}R + R\,\frac{T}{V}\,\frac{\Delta V}{\Delta T}.$$

Здесь $\Delta V/\Delta T$ — наклон процесса на диаграмме V–T. У изохоры наклон нулевой и $C = 3R/2$. У изобары ($p = \text{const}$ и $V = RT/p$) наклон равен V/T и $C = 5R/2$. У нашего процесса наклон равен α: он положителен, но меньше $V/T = \alpha + V_0/T$. Значит, в любой точке процесса $3R/2 < C < 5R/2$, а подстановка $\Delta V/\Delta T = \alpha$ снова даёт $C = 5R/2 - RV_0/V$.



Три процесса через конечную точку $V = 2V_0$ на диаграмме V–T: наклон нашего процесса лежит между изохорой (нулевой) и изобарой

Обратите внимание: теплоёмкость здесь берётся на малом шаге, $C = \delta Q/\Delta T$, а не как $Q/\Delta T$ для всего процесса — иначе получилось бы среднее значение между $3R/2$ и $2R$. Начало процесса ($V = V_0$) — это $T = 0$ и $p = 0$: идеализация идеального газа у абсолютного нуля; формула для C при этом даёт честный предел $3R/2$, потому что работа $p\Delta V$ в окрестности нулевого давления исчезает.

Проверка. Размерность: C — это R, умноженное на безразмерное V_0/V, то есть Дж/(моль·К). Предел: при $V_0 \to 0$ закон превращается в $V = \alpha T$, то есть $p = R/\alpha = \text{const}$ (изобара), и формула даёт $C = 5R/2$ — это C_p одноатомного газа, как и должно быть. Численная проверка: нагреваем моль гелия на малый шаг при $V = V_0$, $1{,}5V_0$ и $2V_0$ и считаем $\delta Q/\Delta T$ — получаем $1{,}5R$, $1{,}833R$ и $2R$ с точностью до 10^{-9}. Смысл: чем больше объём, тем выше давление, тем больше работа на каждый градус нагрева и тем больше теплоты нужно газу.

Ответ. $C_{\min} = \dfrac{3}{2}R$ (при $V = V_0$), $C_{\max} = 2R$ (при $V = 2V_0$) на моль газа.