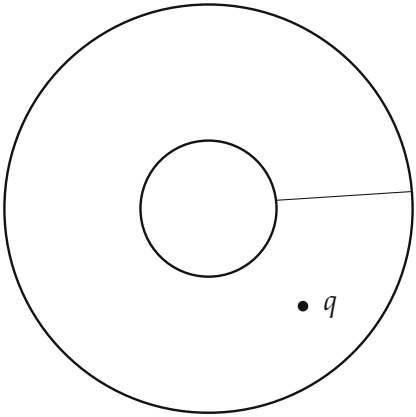
# Заряд между проводящими сферами

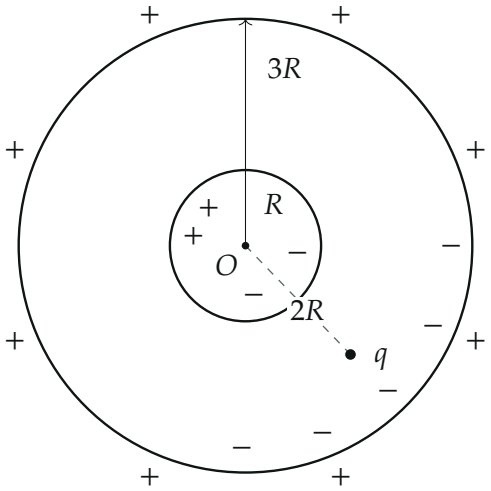
**Задача 4.** [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Имеются две проводящие незаряженные концентрические (с общим центром) сферы радиуса $R$ и $3R$. Между сферами на расстоянии $2R$ от общего центра сфер помещают точечный заряд $q$, а сферы соединяют тонким проводником (см. рисунок). Какой заряд протечёт по этому проводнику с меньшей сферы на бóльшую в процессе установления равновесия?




▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на проводники в электрическом поле точечного заряда: пока сферы не соединены, заряды на них перераспределены полем $q$; после соединения проводником потенциалы сфер выравниваются, и положительный заряд течёт от сферы с большим потенциалом к сфере с меньшим. Значит, нужно найти потенциалы сфер до соединения и потенциал малой сферы после того, как по проводнику перетёк заряд $x$. Ключевой приём — принцип суперпозиции для потенциала в центре: все заряды малой сферы находятся на одном расстоянии $R$ от центра, все заряды большой — на расстоянии $3R$, поэтому неравномерность их распределения не мешает.

**Обозначения.** $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$; $O$ — общий центр; $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — потенциалы малой и большой сфер; $x$ — заряд, который перетёк по проводнику с малой сферы на большую. Считаем $q > 0$.

**1. Заряды на сферах до соединения.** Заряд $q$ перераспределяет заряды на обеих сферах. Малая сфера остаётся нейтральной в целом: заряды на её ближней к $q$ стороне отрицательные, на дальней — положительные. На большой сфере поле внутри металла равно нулю, поэтому по теореме Гаусса для поверхности, лежащей внутри металла, заряд на внутренней поверхности большой сферы равен $-q$ (малая сфера и $q$ вместе дают $+q$), а заряд на внешней, чтобы сфера осталась нейтральной, равен $+q$. Внутренний заряд сосредоточен ближе к $q$, внешний распределён равномерно.




*Заряды до соединения: малая сфера нейтральна в целом, на большой изнутри $-q$ (ближе к $q$), снаружи $+q$ (равномерно)*

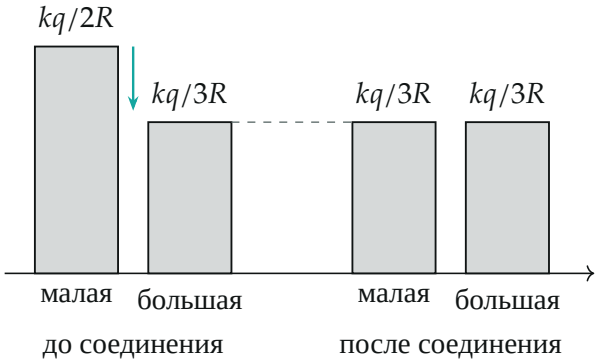
**2. Потенциал малой сферы до соединения.** Внутри малой сферы поле равно нулю, поэтому потенциал всей малой сферы равен потенциалу в её центре $O$. Найдём его по принципу суперпозиции: потенциал в $O$ равен сумме вкладов всех зарядов, а вклад точечного заряда $\Delta Q$ — $k\,\Delta Q/r$. Вклад $q$: $kq/2R$. Заряды малой сферы все на расстоянии $R$ от $O$, их вклад $(k/R)\sum \Delta Q = 0$, потому что сфера нейтральна; то же для большой сферы на расстоянии $3R$: $(k/3R)\cdot 0 = 0$ (сумма $-q$ и $+q$). Поэтому

$$\varphi_1 = \frac{kq}{2R}.$$

**3. Потенциал большой сферы до соединения.** Вне большой сферы заряд внутри неё равен $q$ (малая сфера нейтральна), поле снаружи такое же, как у точечного заряда $q$ в центре, поэтому потенциал большой сферы

$$\varphi_2 = \frac{kq}{3R}.$$

Так как $\varphi_1 > \varphi_2$, после соединения положительный заряд потечёт с малой сферы на большую.




*Потенциалы сфер (высота столбика): до соединения у малой сферы больше; стрелка — переход положительного заряда с малой на большую; после соединения потенциалы одинаковы*

**4. Что не меняется при соединении.** Суммарный заряд двух сфер остаётся нулевым: по проводнику заряд переходит с одной сферы на другую, а внешних зарядов не приходит. Поэтому внутри большой сферы по-прежнему заряд $q$, а вне её — прежнее поле и прежний потенциал большой сферы:

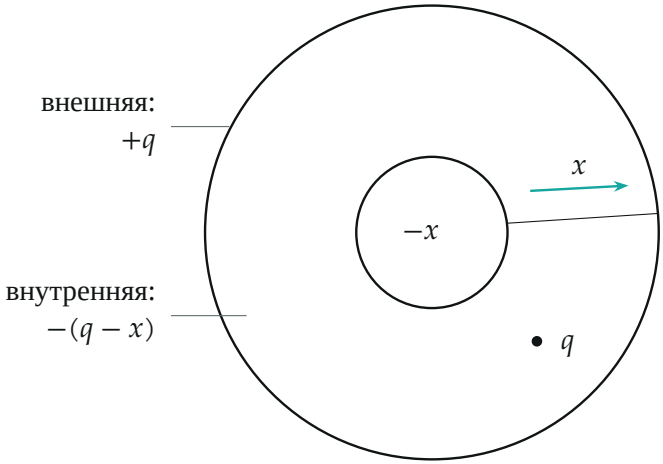
$$\varphi_2' = \frac{kq}{3R}.$$

Обратите внимание: потенциал большой сферы определяется зарядами её *внешней* поверхности, а они не изменились. Сферы соединены проводником — значит, потенциал малой сферы тоже становится $kq/3R$.

**5. Потенциал малой сферы после переноса заряда $x$.** Пусть с малой сферы на большую перетёк заряд $x$. Заряд малой сферы стал $-x$,

большой $+x$; тогда на внутренней поверхности большой сферы заряд $-(q+(-x)) = -(q-x)$, на внешней $+q$ (сумма $+x$). Потенциал в центре $O$ по принципу суперпозиции: вклад $q$, вклад малой сферы на расстоянии $R$, вклад внутренней и внешней поверхностей большой сферы на расстоянии $3R$:

$$\varphi_1' = \frac{kq}{2R} + \frac{k(-x)}{R} + \frac{k(-(q-x))}{3R} + \frac{kq}{3R} = \frac{kq}{2R} - \frac{kx}{R} + \frac{kx}{3R} = \frac{kq}{2R} - \frac{2kx}{3R}.$$

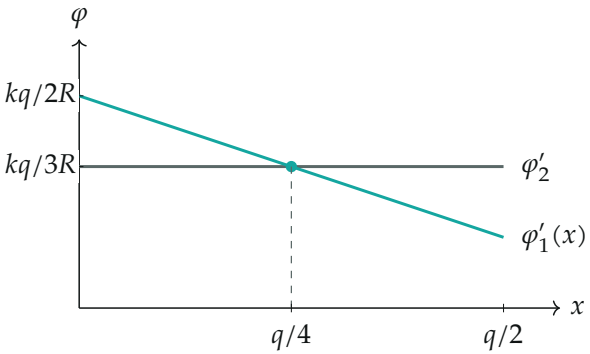



*После соединения: по проводнику перетёк заряд $x$; заряды малой сферы, внутренней и внешней поверхностей большой сферы*

**6. Равновесие.** Потенциалы равны: $\varphi_1' = \varphi_2'$, то есть

$$\frac{kq}{2R} - \frac{2kx}{3R} = \frac{kq}{3R} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{3} = \frac{q}{2} - \frac{q}{3} = \frac{q}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{q}{4}.$$

Знак $x$ положительный: по проводнику с малой сферы на большую перетёк положительный заряд $q/4$ (тот же знак, что у $q$).




*Потенциал малой сферы $\varphi_1'(x)$ убывает с перетёкшим зарядом по прямой; потенциал большой сферы $\varphi_2'$ не меняется; пересечение — состояние равновесия, $x = q/4$*

**Второй способ: сферический конденсатор.** Малая и большая сферы образуют сферический конденсатор с ёмкостью $C = 3R/2k$ (по формуле $C = R_1R_2/[k(R_2 - R_1)]$). До соединения разность потенциалов между сферами $\Delta\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2 = kq/6R$. Перетёкший заряд $x$ создаёт между обкладками разность потенциалов $x/C = 2kx/3R$ в обратную сторону (как $\varphi_1'$ в пункте 5). Равновесие — разность потенциалов равна нулю: $x/C = \Delta\varphi_0$, откуда $x = C\,\Delta\varphi_0 = (3R/2k)(kq/6R) = q/4$. Тот же результат.

Обратите внимание: положение $q$ между сферами не важно, важно только расстояние $2R$ до центра, потому что потенциал малой сферы определяется потенциалом в центре.

**Проверка.** Размерность: все слагаемые в уравнении равновесия имеют вид $k\cdot$заряд/длина, значит, $x$ — заряд. Предел: если точечный заряд на расстоянии $r$ от центра, то $\varphi_1 = kq/r$ и $x = q\,(3R/2r - 1/2)$; при $r = 2R$ получаем $q/4$; при $r \to 3R$ (заряд у большой сферы) $x \to 0$, и ток не течёт, потому что потенциалы сфер равны; при $r \to R$ (заряд прижат к малой сфере) $x \to q$: малая сфера становится заряженной $-q$ и экранирует $q$. Смысл: заряд стекает туда, где потенциал ниже, пока потенциалы не сравняются.

**Ответ.** По проводнику протечёт заряд $\dfrac{q}{4}$ того же знака, что и $q$.