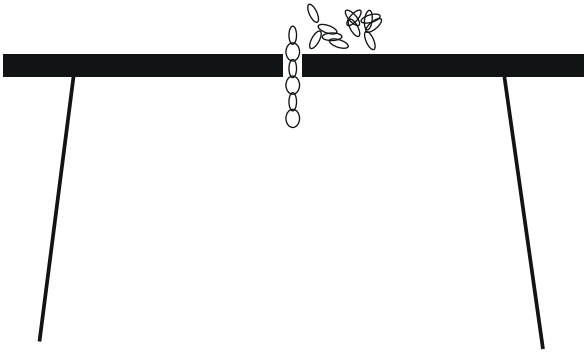
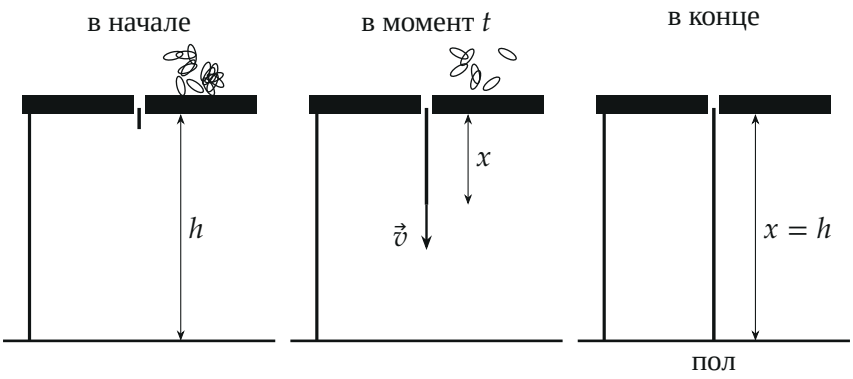
Цепочка падает в отверстие

Задача 5. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 5] В центре горизонтального гладкого стола, расположенного на высоте h от пола, сделано отверстие. Около отверстия лежит свёрнутая в бухту цепочка с мелкими звеньями длиной $l = h$. Один конец цепочки тихонько сталкивают в отверстие, и цепочка начинает падать. Через какое время цепочка коснётся пола? Ответ обосновать.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тела переменной массы: падающая часть цепочки вовлекает в движение лежащие в бухте звенья, и каждое новое звено приходится разгонять от нуля до скорости v. Для этого нужна сила, и её создаёт падающая часть: она тянет вниз своим весом, а вовлекаемые звенья тянут её вверх. Поэтому падающая часть цепочки движется с ускорением, меньшим g. Ключевые законы — второй закон Ньютона (в виде изменения импульса за малое время) для падающей части и закон движения с найденным ускорением.

Обозначения. λ — масса единицы длины цепочки; x — длина свисающей (движущейся) части: она равна пути, пройденному концом цепочки вниз от уровня стола; v и a — скорость и ускорение падающей части. Ось x направлена вниз вдоль цепочки. Бухта лежит у самого отверстия, поэтому каждое звено, вовлекаясь в движение, сразу начинает двигаться вниз; стол гладкий; цепочка гибкая. В начале $x = 0$ и $v = 0$ (конец сталкивают «тихонько»).



Три момента падения: в начале, в произвольный момент t и в конце (конец коснулся пола, вся цепочка вышла из бухты)

1. Сила, с которой падающая часть разгоняет звенья. Рассмотрим малый промежуток времени dt. За него конец цепочки проходит путь $v\,dt$, и в движение вовлекается кусок цепочки длиной $v\,dt$ и массой $\lambda v\,dt$. Его скорость меняется от нуля до v, поэтому изменение его импульса $\lambda v\,dt \cdot v = \lambda v^2\,dt$. Значит, на этот кусок действует сила

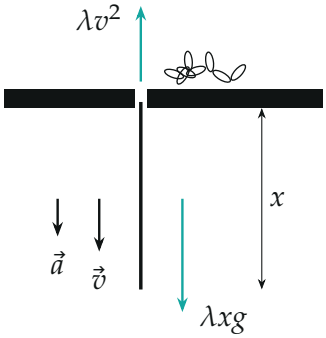
$$F = \frac{\lambda v^2\,dt}{dt} = \lambda v^2,$$

направленная вниз — со стороны падающей части. По третьему закону Ньютона такая же по модулю сила λv^2 действует на падающую часть вверх.

2. Второй закон Ньютона для падающей части. Падающая часть — это масса λx; на неё действуют тяжесть $\lambda x g$ вниз и сила λv^2 вверх (рисунок ниже). Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x вниз:

$$\lambda x\, a = \lambda x g - \lambda v^2 \quad \Rightarrow \quad a = g - \frac{v^2}{x}.$$

Качественно: пока цепочка разгоняется, v растёт, сила λv^2 растёт, и ускорение падающей части оказывается меньше g.



Силы на падающую часть цепочки: тяжесть λxg и сила λv^2 от вовлекаемых звеньев (длины стрелок соответствуют найденному ниже $v^2 = 2gx/3$)

Второй способ: импульс всей движущейся части. Импульс падающей части $p = \lambda xv$ меняется только под действием силы тяжести λxg (лежащие звенья стол держит, они в импульс не входят): $dp/dt = \lambda xg$, то есть

$$\frac{d(xv)}{dt} = xg.$$

Раскроем производную, учтя $dx/dt = v$: $v^2 + xa = xg$. Получили то же, что в пункте 2.

3. Как движется цепочка. Нужно решить уравнение $a = g - v^2/x$ относительно $v(x)$. Выразим ускорение через путь:

$$a = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dx}.$$

Тогда уравнение $\lambda xa = \lambda xg - \lambda v^2$ принимает вид $\dfrac{x}{2}\dfrac{d(v^2)}{dx} = xg - v^2$. Умножим на $2x$ и перенесём слагаемое:

$$x^2\frac{d(v^2)}{dx} + 2x\,v^2 = 2gx^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(x^2v^2\right)}{dx} = 2gx^2.$$

Зачем это преобразование: левая часть стала производной одной величины x^2v^2, и уравнение интегрируется сразу. Проинтегрируем от начала

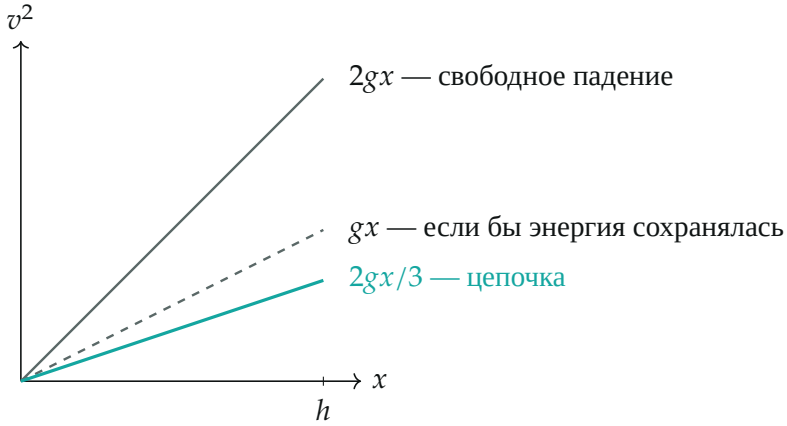
($x = 0$, $v = 0$, там $x^2v^2 = 0$) до текущей длины x:

$$x^2v^2 - 0 = \int_0^x 2gx'^2\,dx' = \frac{2gx^3}{3}.$$

Разделим на x^2. Значит,

$$v^2 = \frac{2}{3}gx, \qquad a = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dx} = \frac{g}{3}.$$

Цепочка падает *равноускоренно* с ускорением $a = g/3$ (то же получим сразу, если искать решение с постоянным ускорением: $v^2 = 2ax$, тогда $a = g - 2a$).

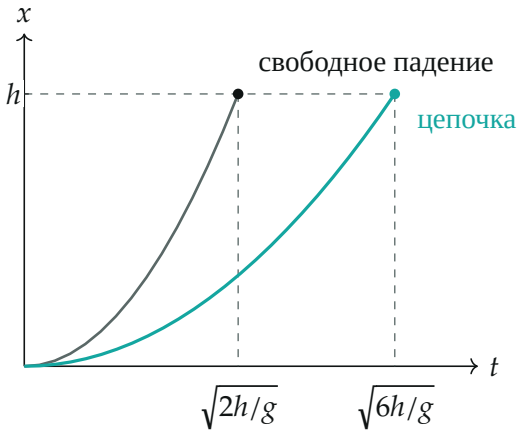


Квадрат скорости в зависимости от пути: цепочка (бирюзовая) разгоняется втрое медленнее свободного падения, пунктир — результат неверного применения закона сохранения энергии

4. Время падения. Конец цепочки движется равноускоренно из состояния покоя: $x = \dfrac{at^2}{2} = \dfrac{gt^2}{6}$. Цепочка коснётся пола, когда конец пройдёт путь h (при $l = h$ к этому моменту вся цепочка как раз вышла из бухты: при $l < h$ после выхода последнего звена цепочка падала бы свободно):

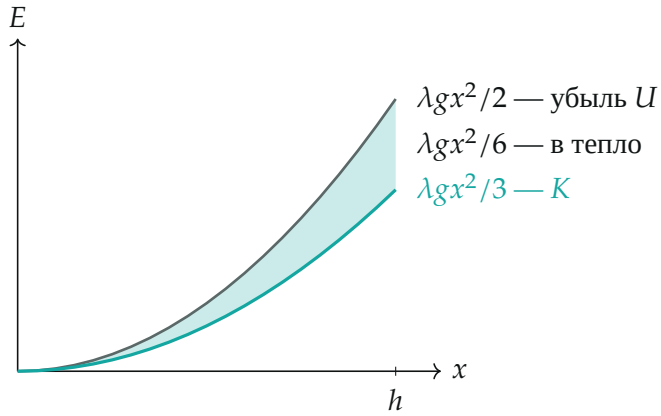
$$h = \frac{gt^2}{6} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{6h}{g}}.$$

Такое же падение свободного тела заняло бы $\sqrt{2h/g}$, то есть в $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ раза меньше.



Путь конца цепочки и свободно падающего тела от времени: цепочка достигает пола за время $\sqrt{6h/g}$, свободное падение — за $\sqrt{2h/g}$

Обратите внимание: закон сохранения механической энергии здесь применять нельзя. Он дал бы $v^2/2 = gx/2$, то есть $a = g/2$ и $t = \sqrt{4h/g}$ — неверно: вовлечение звеньев в движение — неупругие рывки, и часть энергии уходит в тепло. Убыль потенциальной энергии вовлечённых звеньев (центр масс опустился на $x/2$) равна $\lambda g x^2/2$, кинетическая энергия $\lambda x v^2/2 = \lambda g x^2/3$, остальное $\lambda g x^2/6$ — в тепло, одна треть убыли.



Энергия при падении цепочки: убыль потенциальной энергии (серая), кинетическая энергия (бирюзовая), разность (закрашена) — в тепло

Проверка. Размерность: $\sqrt{h/g}$ — это секунды. Численная проверка: интегрирование уравнения $a = g - v^2/x$ (цепочка начинает с $x_0 = 10^{-3}$ м, $v = 0$, $h = 1$ м) даёт $t = 0{,}764$ с; при $x_0 = 10^{-5}$ м — $0{,}781$ с, а формула даёт $\sqrt{6 \cdot 1/9{,}8} \approx 0{,}782$ с (свободное падение — $0{,}452$ с). Предел: если бы звенья не надо было вовлекать (вся цепочка уже свисала), было бы $a = g$ — в формуле $a = g - v^2/x$ второе слагаемое v^2/x пропало бы. Смысл: цепочка падает медленнее свободного тела, потому что в каждый момент часть веса уходит на то, чтобы разогнать лежащие звенья.

Ответ. $t = \sqrt{\dfrac{6h}{g}}$ (цепочка падает равноускоренно с ускорением $g/3$).