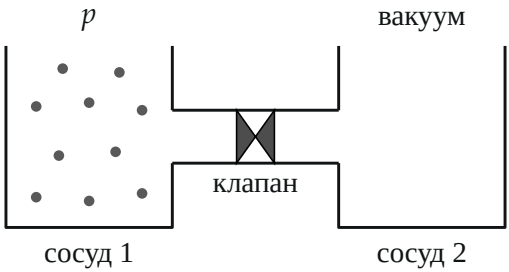
Два сосуда с клапаном

Задача 1. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Имеется два одинаковых сосуда, соединённые трубкой с клапаном. В одном сосуде содержится идеальный газ под давлением p, в другом сосуде — вакуум. Клапан пропускает газ из одного сосуда в другой при перепаде давлений $\Delta p = 2p$. Сосуды нагревают, увеличивая их абсолютную температуру в 3 раза. Найти давление газа в сосудах после этого.



Поясняющий рисунок: газ в первом сосуде, клапан закрыт, второй сосуд пуст

▲ **Решение. Что происходит.** Пока перепад давлений на клапане меньше $2p$, клапан закрыт и весь газ остаётся в первом сосуде. Когда давление там дойдёт до $2p$ (во втором сосуде вакуум, перепад равен $2p - 0$), клапан начнёт пропускать газ и при дальнейшем нагреве будет держать перепад ровно $2p$. Это задача на сохранение числа молей: газ делится между сосудами так, чтобы выполнялись уравнение Клапейрона — Менделеева для каждого сосуда и условие на клапан.

Обозначения. V — объём каждого сосуда (объёмом трубки пренебрегаем); T — начальная температура; ν — число молей газа; T' — текущая температура; p_1, p_2 — конечные давления в первом сосуде (где газ был вначале) и во втором; $\Delta\nu$ — число молей, перешедших во второй сосуд. Оба сосуда нагреваются одинаково, поэтому температура газа в них одна и конечная температура равна $3T$.

1. Начальное состояние. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для всего газа, находящегося в первом сосуде:

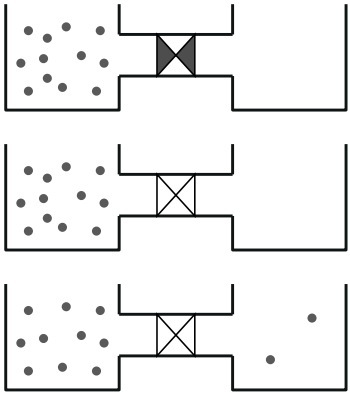
$$pV = \nu RT.$$

Число молей ν дальше не меняется: газ только переходит из сосуда в сосуд.

2. Клапан закрыт. Газ нагревается при постоянном объёме V и постоянном ν, поэтому давление в первом сосуде растёт пропорционально температуре: $p' = pT'/T$. Клапан откроется, когда p' станет равно $\Delta p = 2p$:

$$\frac{pT'}{T} = 2p \quad \Rightarrow \quad T' = 2T.$$

Конечная температура $3T$ больше $2T$, значит, клапан откроется до конца нагрева, и дальше газ нагревается уже с перетеканием.



(а) начало, температура T:
$p_1 = p,\ p_2 = 0$

(б) клапан открылся, $2T$:
$p_1 = 2p,\ p_2 = 0$

(в) конец нагрева, $3T$:
$p_1 = \frac{5}{2}p,\ p_2 = \frac{1}{2}p$

Три состояния газа: клапан закрыт; клапан только что открылся; конец нагрева, часть газа перетекла во второй сосуд

Обратите внимание: ответ «$3p$» (давление в одном закрытом сосуде при утроении температуры) неверен: давление в первом сосуде не может превышать давление во втором больше чем на $2p$.

3. Клапан открыт. При $T' \geqslant 2T$ клапан пропускает столько газа, чтобы перепад давлений оставался равным $2p$: если бы перепад стал меньше, газ перестал бы перетекать и нагрев снова поднял бы его до $2p$;

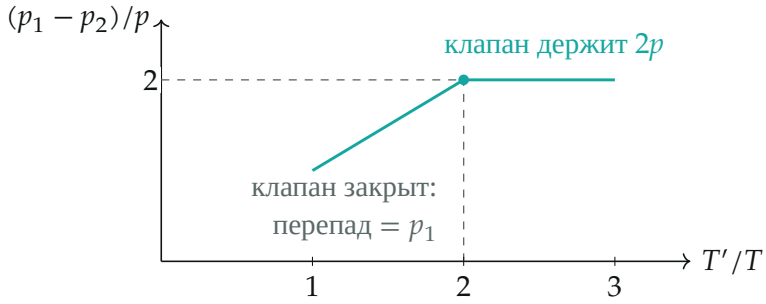
больше $2p$ он стать не может. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для газа в каждом сосуде в конечном состоянии, при температуре $3T$:

$$p_1 V = (\nu - \Delta\nu)\, R \cdot 3T, \qquad p_2 V = \Delta\nu\, R \cdot 3T,$$

и условие клапана

$$p_1 - p_2 = \Delta p = 2p.$$

Здесь три неизвестных p_1, p_2, $\Delta\nu$ и три уравнения, а число молей ν выражается через p по пункту 1. Расписывать $\Delta\nu$ не нужно: оно уйдёт при сложении.



Перепад давлений растёт вместе с температурой и упирается в предел клапана $2p$

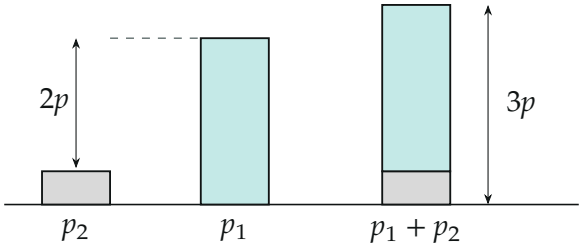
4. Сложение уравнений. Сложим два уравнения пункта 3 и подставим $\nu RT = pV$ из пункта 1:

$$(p_1 + p_2)\, V = 3\nu RT = 3pV \quad \Rightarrow \quad p_1 + p_2 = 3p.$$

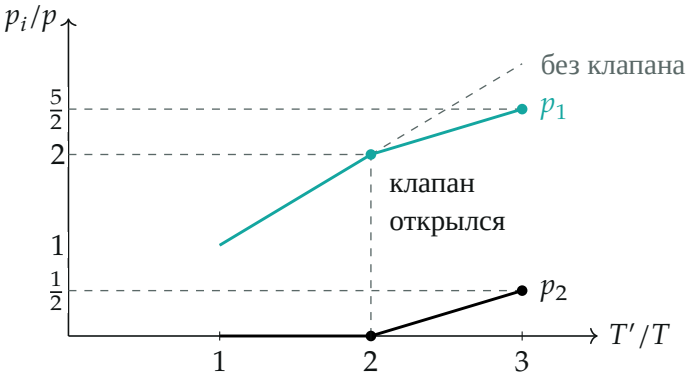
Теперь у нас два уравнения на давления: $p_1 + p_2 = 3p$ и $p_1 - p_2 = 2p$. Складываем и вычитаем:

$$p_1 = \frac{3p + 2p}{2} = \frac{5}{2}p, \qquad p_2 = \frac{3p - 2p}{2} = \frac{1}{2}p.$$

В первом сосуде давление остаётся больше, потому что газ перетекает только пока перепад достигает $2p$, а не пока давления сравняются.



Давление в сосудах: разность $p_1 - p_2 = 2p$ задаёт клапан, сумма $p_1 + p_2 = 3p$ — сохранение числа молей



Давления в сосудах при нагреве: до $2T$ газ только в первом сосуде, дальше клапан держит перепад $2p$

Проверка. Размерность: p_1 и p_2 выражены через p — это давления. Второй способ — через число молей: во второй сосуд перешло $\Delta\nu = \frac{p_2 V}{3RT} = \frac{pV}{6RT} = \frac{\nu}{6}$, в первом осталось $\frac{p_1 V}{3RT} = \frac{5\nu}{6}$, вместе снова ν. Предел: если бы клапан держал перепад $\Delta p \geqslant 3p$, он бы не открылся и $p_1 = 3p$, $p_2 = 0$; формулы $p_1 = \frac{3p+\Delta p}{2}$ и $p_2 = \frac{3p-\Delta p}{2}$ при $\Delta p = 3p$ дают ровно это. При $\Delta p \to 0$ давления выравниваются и равны $\frac{3}{2}p$: газ утроенной температуры расширился вдвое. Смысл: в среднем в сосудах $\frac{3}{2}p$, а клапан растаскивает давление на $\frac{5}{2}p$ и $\frac{1}{2}p$ с разностью $2p$.

Ответ. В первом сосуде (где газ был вначале) $p_1 = \frac{5}{2}p$; во втором сосуде $p_2 = \frac{1}{2}p$.