Жидкости в кольцевой трубке

Задача 2. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Кольцо изготовлено из длинной и тонкой трубки. В трубку залили равные объёмы двух несмешивающихся жидкостей, которые в сумме занимают половину объёма трубки. Кольцо расположили в вертикальной плоскости. При этом оказалось, что угол, который составляет с вертикалью отрезок, соединяющий центр кольца и границу раздела жидкостей, равен α (см. рисунок). Найти плотность более тяжёлой жидкости, если плотность более лёгкой равна ρ.

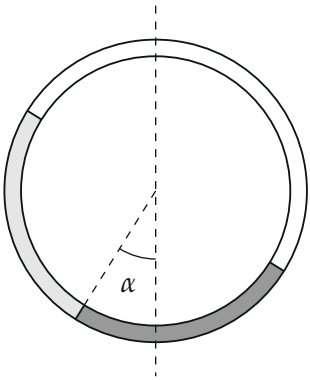


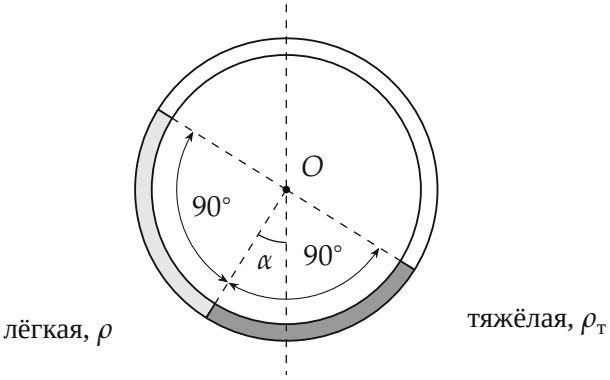
Рисунок к условию: светлая жидкость слева, тяжёлая справа, α — угол между вертикалью и радиусом к границе жидкостей

▲ **Решение. Что происходит.** Жидкости покоятся, а трубка тонкая, поэтому давление в них зависит только от вертикальной глубины и не зависит от изгибов трубки. Значит, давление на границе двух жидкостей можно найти двумя способами — сверху со стороны лёгкой жидкости и сверху со стороны тяжёлой — и приравнять: граница не движется. Равные объёмы, вместе занимающие половину кольца, задают положение свободных поверхностей через угол α. Это задача на гидростатику сообщающихся сосудов, только сосуд изогнут в кольцо.

Обозначения. R — радиус кольца (трубка тонкая, толщиной пренебрегаем); $\rho_т$ — искомая плотность тяжёлой жидкости; p_0 — давление воздуха в свободной половине кольца (воздух сообщается по всей этой

части, поэтому давление над обеими свободными поверхностями одно и то же); O — центр кольца. Положение точки на кольце задаём углом θ от нижней точки кольца, отсчитывая его вправо положительным; тогда высота точки над нижней точкой кольца $h(\theta) = R\,(1 - \cos\theta)$.

1. Где находятся жидкости. Трубка одинакового сечения, поэтому равные объёмы жидкостей занимают равные по длине дуги. Вместе они занимают половину кольца, то есть дугу 180°, значит, каждая жидкость занимает дугу 90° (четверть окружности). Граница расположена на угле α слева от вертикали, то есть $\theta = -\alpha$ (лёгкая жидкость над ней по трубке слева, тяжёлая — справа, как на рисунке к условию).



Равные объёмы в трубке постоянного сечения занимают равные дуги: по четверти окружности

2. Высоты свободных поверхностей. Тяжёлая жидкость идёт от границы вправо на 90°, её свободная поверхность находится при $\theta = 90° - \alpha$; лёгкая идёт от границы влево на 90°, её свободная поверхность — при $\theta = -(90° + \alpha)$. Высоты над нижней точкой кольца:

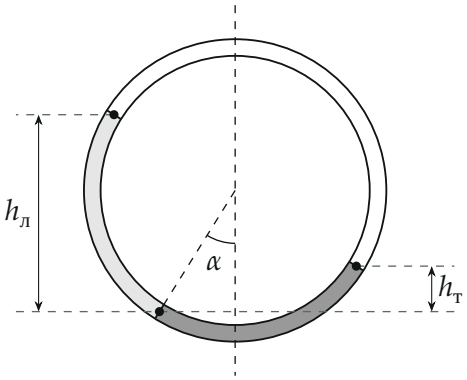
$$h_{\text{гр}} = R\,(1 - \cos\alpha),$$
$$h_{\text{т.п.}} = R\,(1 - \cos(90° - \alpha)) = R\,(1 - \sin\alpha),$$
$$h_{\text{л.п.}} = R\,(1 - \cos(90° + \alpha)) = R\,(1 + \sin\alpha),$$

где «гр» — граница жидкостей, «т.п.» и «л.п.» — свободные поверхности тяжёлой и лёгкой жидкости. Расстояния по вертикали от границы

до свободных поверхностей:

$$h_т = h_{т.п.} - h_{гр} = R\,(\cos\alpha - \sin\alpha), \qquad h_л = h_{л.п.} - h_{гр} = R\,(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Обратите внимание: в гидростатическое давление входит именно вертикальная высота, а не длина дуги трубки между точками.



Свободная поверхность лёгкой жидкости выше границы на $h_л$, тяжёлой — на h_m

3. Давление на границе со стороны тяжёлой жидкости. В покоящейся жидкости давление растёт с глубиной по закону $\Delta p = \rho g\,\Delta h$ для двух точек одной и той же жидкости. Свободная поверхность тяжёлой жидкости лежит выше границы на $h_т$, и давление на границе

$$p_{гр} = p_0 + \rho_т g\,h_т = p_0 + \rho_т g R\,(\cos\alpha - \sin\alpha).$$

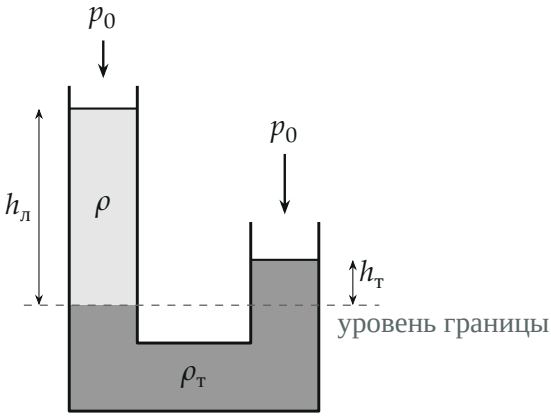
4. Давление на границе со стороны лёгкой жидкости. Свободная поверхность лёгкой жидкости лежит выше границы на $h_л$:

$$p_{гр} = p_0 + \rho g\,h_л = p_0 + \rho g R\,(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

5. Условие равновесия. Давление жидкости на границу сверху и снизу должно быть одинаковым: на тонкий слой границы действуют только силы давления с двух сторон, а его масса мала. Приравняем выражения

пунктов 3 и 4:

$$\rho_т\,(\cos\alpha - \sin\alpha) = \rho\,(\cos\alpha + \sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad \rho_т = \rho\,\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}.$$



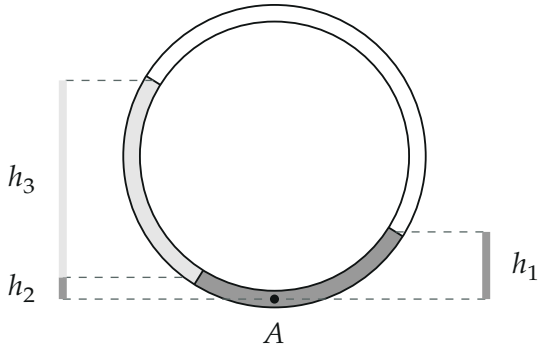
Равносильная схема: ниже уровня границы в обоих коленах одна и та же тяжёлая жидкость, поэтому давления на этом уровне равны

Тот же результат даёт схема на рисунке: ниже уровня границы в обоих коленах находится одна и та же тяжёлая жидкость, поэтому давления на этом уровне одинаковы, а выше него остаются два столба — лёгкий высотой $h_л$ и тяжёлый высотой $h_т$ — под одним давлением p_0 сверху.

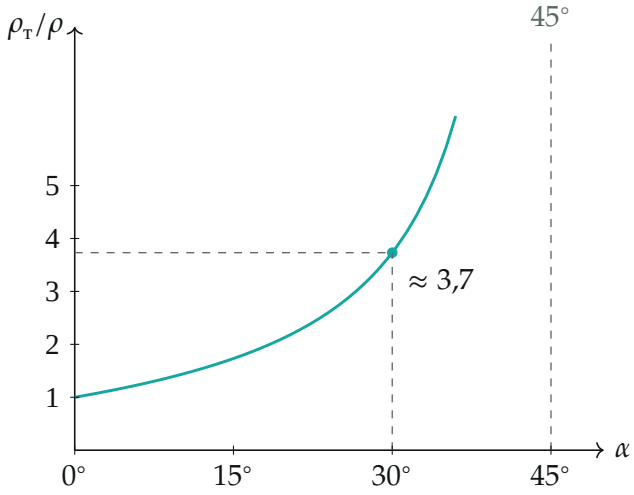
6. Второй способ: давление в нижней точке кольца. Найдём давление в нижней точке A кольца, идя к ней от каждой свободной поверхности. Справа сверху вниз идёт тяжёлая жидкость, высота $h_1 = R\,(1 - \sin\alpha)$. Слева сначала лёгкая высотой $h_3 = h_л = R\,(\cos\alpha + \sin\alpha)$, потом тяжёлая высотой $h_2 = R\,(1 - \cos\alpha)$:

$$p_0 + \rho_т\,gR\,(1 - \sin\alpha) = p_0 + \rho\,gR\,(\cos\alpha + \sin\alpha) + \rho_т\,gR\,(1 - \cos\alpha).$$

Сократим p_0, gR и слагаемое $\rho_т$ с единицей и получим то же уравнение $\rho_т(\cos\alpha - \sin\alpha) = \rho(\cos\alpha + \sin\alpha)$.



Второй способ: давление в нижней точке A считаем справа (h_1 тяжёлой жидкости) и слева (h_2 тяжёлой и h_3 лёгкой)



Отношение плотностей растёт с углом и уходит в бесконечность при $\alpha \to 45°$ **Проверка.** Размерность: множитель при ρ безразмерен. Предел $\alpha \to 0$: жидкости расположены симметрично, $\rho_т \to \rho$, как и получается. При $\alpha \to 45°$ столб тяжёлой жидкости над границей исчезает ($h_т \to 0$), и плотность должна неограниченно расти; поэтому равновесие на рисунке возможно только при $\alpha < 45°$. Знак: $\rho_т > \rho$ в этом диапазоне, как и должно быть для более тяжёлой жидкости.

Ответ. $\rho_т = \rho\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \rho\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$ (при $\alpha < 45°$).