Заряд налетает на два заряда

Задача 3. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Два точечных заряда $2Q$ и $-Q$ закреплены на расстоянии l друг от друга. Из бесконечности на заряды вдоль их соединяющей прямой налетает заряд Q, имеющий массу m и начальную скорость v_0. При каком минимальном значении v_0 этот заряд сможет долететь до заряда $-Q$?



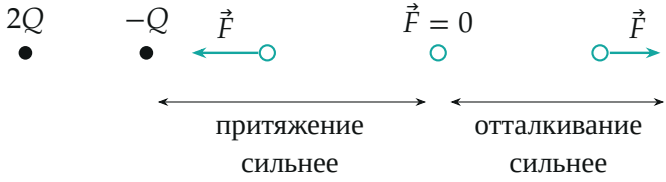
▲ **Решение.** **Что происходит.** Издалека два заряда $2Q$ и $-Q$ выглядят как один заряд $+Q$, поэтому налетающий заряд Q сначала отталкивается и тормозится. Вблизи заряда $-Q$ побеждает притяжение: этот заряд ближе, чем $2Q$. Значит, на прямой есть точка, в которой отталкивание сменяется притяжением, то есть сила равна нулю. Если заряд дойдёт до неё, дальше он разгоняется сам и обязательно достигнет $-Q$. Поэтому минимальная скорость v_0 та, при которой заряд приходит в эту точку с нулевой скоростью. Это задача на сохранение энергии заряда в поле неподвижных зарядов, а точка нулевой силы — вершина потенциального «холма».

Обозначения. k — постоянная в законе Кулона; s — расстояние от налетающего заряда до заряда $-Q$ (заряд находится на прямой за $-Q$, с той стороны, откуда он налетает; расстояние до $2Q$ тогда $l + s$); x — значение s в точке нулевой силы; $\varphi_\infty = 0$ и φ_x — потенциалы поля неподвижных зарядов на бесконечности и в точке нулевой силы.

1. Куда направлена сила. На заряд Q действуют две силы вдоль прямой: отталкивание от $2Q$ и притяжение к $-Q$,

$$F_{\text{от}} = \frac{k \cdot 2Q \cdot Q}{(l+s)^2}, \qquad F_{\text{пр}} = \frac{k\,Q \cdot Q}{s^2}.$$

Вблизи $-Q$ при $s \to 0$ сила $F_{\text{пр}}$ растёт неограниченно и побеждает, а при $s \to \infty$ отношение $F_{\text{от}}/F_{\text{пр}} = 2s^2/(l+s)^2 \to 2$, то есть побеждает отталкивание. Между этими областями сила проходит через ноль.

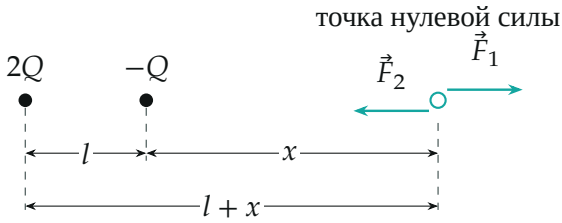


Сила на налетающий заряд (светлые кружки): ближе к $-Q$ она направлена к нему, дальше — от зарядов, в точке между этими областями равна нулю

2. Точка нулевой силы. Приравняем модули сил:

$$\frac{2}{(l+x)^2} = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\,x = l + x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{\sqrt{2}-1} = l\,(\sqrt{2}+1).$$

Численно $x \approx 2{,}41\,l$. Обратите внимание: при извлечении корня из $2x^2 = (l+x)^2$ получается ещё корень $x = -l/(\sqrt{2}+1)$. Он лежит между зарядами, где обе силы направлены в одну сторону и в ноль обратиться не могут, поэтому он не подходит.



В точке нулевой силы отталкивание от $2Q$ ($\vec{F}_1$) уравновешено притяжением к $-Q$ ($\vec{F}_2$)

3. Почему достаточно дойти до этой точки. Пока заряд не дошёл до точки x, сила направлена против его движения, и он тормозится. После прохождения точки x сила направлена к $-Q$, то есть по движению, и заряд разгоняется до самого $-Q$. Значит, нужная скорость на бесконечности та, при которой заряд как раз доходит до точки x и там останавливается. При меньшей v_0 заряд остановится раньше и отлетит назад, при большей — пройдёт точку x с ненулевой скоростью и долетит.

4. Потенциалы. Потенциал поля неподвижных зарядов по принципу суперпозиции складывается из потенциалов зарядов. На бесконечности

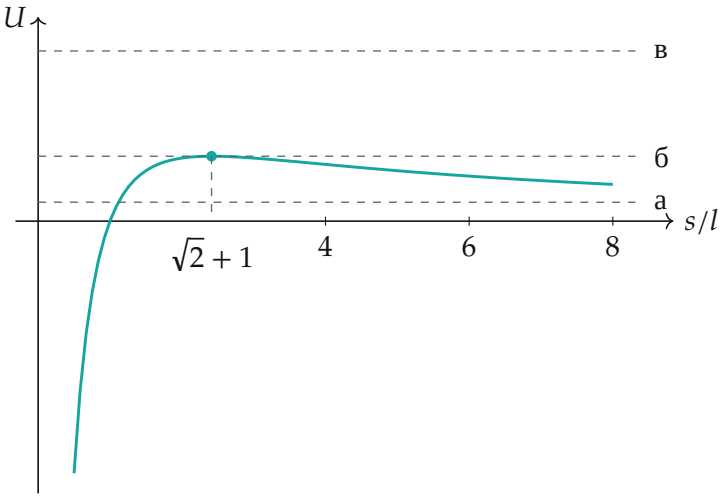
$\varphi_\infty = 0$, в точке нулевой силы (расстояния $l+x$ и x до зарядов $2Q$ и $-Q$)

$$\varphi_x = \frac{k\cdot 2Q}{l+x} - \frac{kQ}{x}.$$

Подставим $x = l(\sqrt{2}+1)$, тогда $l+x = l\,(\sqrt{2}+2) = \sqrt{2}\,l\,(\sqrt{2}+1)$, и

$$\frac{2}{l+x} = \frac{\sqrt{2}}{l\,(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}{l}, \qquad \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}-1}{l},$$

$$\varphi_x = \frac{kQ}{l}\,(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2\,kQ}{l}.$$



Потенциальная энергия U заряда Q в поле двух зарядов (в единицах kQ^2/l) в зависимости от расстояния s до $-Q$. Горизонтали — полная энергия: а — заряд не долетит, б — граничный случай, в — долетит

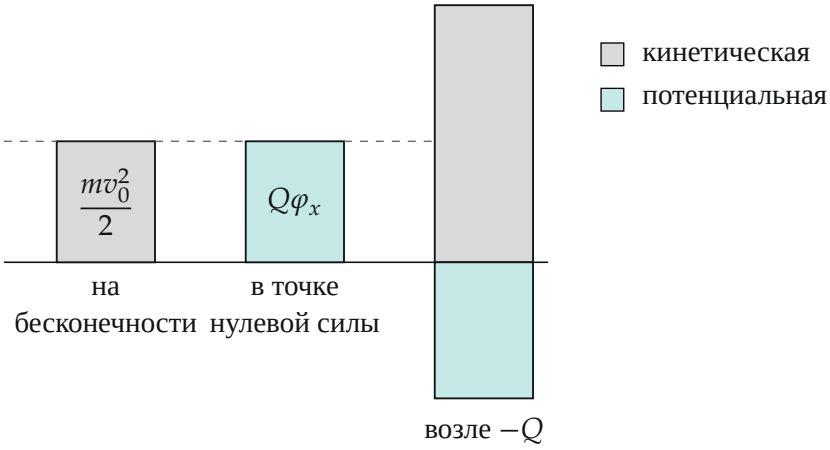
5. Закон сохранения энергии. Кулоновская сила потенциальна, других сил нет, поэтому механическая энергия заряда Q сохраняется. Запишем её для двух моментов: на бесконечности (кинетическая энергия $mv_0^2/2$, потенциальная $Q\varphi_\infty = 0$) и в точке нулевой силы (скорость рав-

на нулю, потенциальная энергия $Q\varphi_x$):

$$\frac{mv_0^2}{2} + Q\varphi_\infty = 0 + Q\varphi_x \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{2Q\varphi_x}{m} = \frac{2\,(\sqrt{2}-1)^2\,kQ^2}{ml}.$$

Потенциальная энергия в точке x положительна: заряду нужно потратить кинетическую энергию, чтобы подняться на этот «холм». Извлекаем корень:

$$v_{0,\min} = (\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{2kQ^2}{ml}} \approx 0{,}59\sqrt{\frac{kQ^2}{ml}}.$$



Полная энергия (штриховая линия) одна и та же: на бесконечности она вся кинетическая, в точке нулевой силы — вся потенциальная, возле $-Q$ потенциальная энергия отрицательна и кинетическая её превосходит

Второй способ найти точку. Потенциальная энергия заряда на расстоянии s от $-Q$ равна $U(s) = kQ^2\left(\frac{2}{l+s} - \frac{1}{s}\right)$. Заряд преодолевает «холм» $U(s)$, если его полная энергия не меньше максимума. В максимуме $\frac{dU}{ds} = kQ^2\left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{(l+s)^2}\right) = 0$ — то же уравнение, что и условие нулевой силы (сила равна $-dU/ds$), и тот же ответ $s = x$.

Проверка. Размерность: $kQ^2/(ml)$ — энергия, делённая на массу, то

есть квадрат скорости. Заменим $2Q$ на nQ: те же шаги дают

$$x = \frac{l}{\sqrt{n}-1}, \qquad \varphi_x = \frac{(\sqrt{n}-1)^2\,kQ}{l}, \qquad v_{0,\min} = (\sqrt{n}-1)\sqrt{\frac{2kQ^2}{ml}}.$$

При $n = 1$ суммарный заряд пары равен нулю, отталкивания издалека нет и $v_{0,\min} = 0$ — как и должно быть. Числовая проверка: решение уравнения движения при скорости на 0,5 % меньше найденной даёт отражение заряда, на 0,5 % больше — долёт до $-Q$.

Ответ. $v_{0,\min} = (\sqrt{2}-1)\sqrt{\dfrac{2kQ^2}{ml}} = \sqrt{\dfrac{2\,(\sqrt{2}-1)^2\,kQ^2}{ml}} \approx 0{,}59\sqrt{\dfrac{kQ^2}{ml}}.$