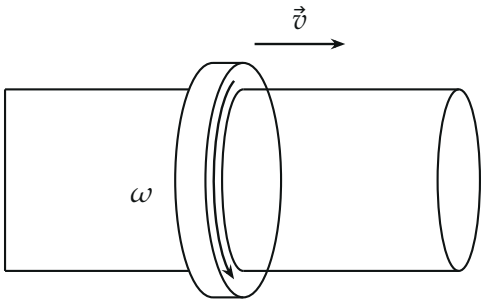
Шайба на стержне

Задача 4. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Тонкая массивная шайба надета без зазора на горизонтальный стержень радиуса R (см. рисунок). Если шайбу закрутить с угловой скоростью ω, она остановится через время t. Какой путь пройдёт шайба вдоль стержня, если закрутить её с угловой скоростью ω и одновременно сообщить ей скорость $\vec{v}$, направленную вдоль стержня?



▲ **Решение. Что происходит.** Шайба скользит по стержню, поэтому на неё действует сила трения скольжения. Она направлена против скорости *точки контакта шайбы относительно стержня*, а её модуль постоянен: $F = \mu N$, где N — сила реакции стержня, она определяется весом шайбы и не меняется. Условие называет тело шайбой и не даёт её внешнего радиуса, а официальное решение (и его ответ) молча считает, что вся масса шайбы находится на расстоянии R от оси, то есть момент инерции $I = mR^2$: это узкое кольцо, у которого внешний радиус почти равен R. Из условия это не следует — это допущение организаторов, без него задача не решается однозначно; ниже мы принимаем его явно. При $I = mR^2$ выходит так: трение сообщает точке контакта ускорение одного и того же модуля $a = \mu N/m$, направленное против её скорости, и точка контакта тормозится по прямой, как тело на горизонтальной плоскости с трением. Первый опыт позволяет найти a, а во втором остаётся найти время остановки и проекцию этого движения на ось стержня.

Обозначения. m — масса шайбы; $F = \mu N$ — модуль силы трения; $\vec{u}$ — скорость точки шайбы, касающейся стержня, относительно стержня;

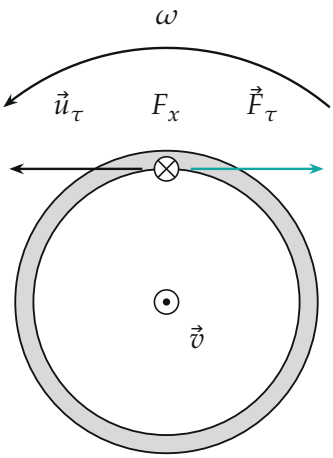
u_x — её составляющая вдоль оси стержня (это скорость шайбы вдоль стержня), $u_\tau = \omega R$ — составляющая по окружности (из-за вращения); a — модуль ускорения точки контакта; t_1 — время остановки во втором опыте; S — искомый путь вдоль стержня.

1. Первый опыт: ускорение точки контакта. Скорость вдоль стержня равна нулю, точка контакта движется по окружности радиуса R со скоростью ωR. Трение направлено по касательной против этой скорости, его момент относительно оси равен $-FR$. Запишем уравнение вращательного движения шайбы относительно оси:

$$I\frac{d\omega}{dt} = -FR \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\omega R)}{dt} = -\frac{FR^2}{I} = -\frac{F}{m} = -a,$$

где использовано $I = mR^2$. Скорость точки контакта убывает с постоянным по модулю ускорением a, и по условию обращается в ноль за время t:

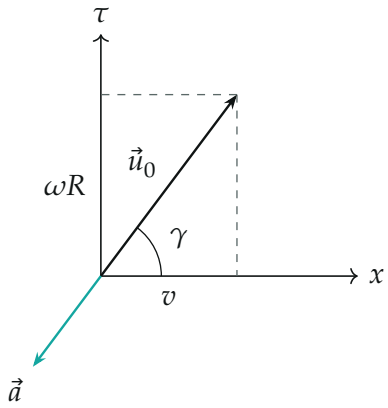
$$\omega R - at = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\omega R}{t}.$$



Вид вдоль стержня на шайбу (светлое кольцо) на стержне: у точки контакта скорость $\vec{u}_\tau = \omega R$ влево, составляющая трения $\vec{F}_\tau$ вправо тормозит вращение, составляющая F_x (от нас) тормозит движение вдоль стержня

2. Второй опыт: что тормозит и как. Теперь точка контакта движется по поверхности стержня по обеим осям сразу: вдоль стержня со скоростью v и по окружности со скоростью ωR. Эти направления перпендикулярны, поэтому начальная скорость точки контакта

$$u_0 = \sqrt{(\omega R)^2 + v^2}.$$



Скорость точки шайбы, касающейся стержня, относительно стержня: $\vec{u}_0$ — сумма v вдоль стержня и ωR по окружности; ускорение $\vec{a}$ от трения направлено против $\vec{u}_0$

Сила трения направлена против $\vec{u}$ и имеет тот же модуль $F = \mu N$; её составляющие по осям пропорциональны составляющим скорости: $F_x = -F\,u_x/u$, $F_\tau = -F\,u_\tau/u$. Запишем второй закон Ньютона для поступательного движения шайбы вдоль стержня и уравнение моментов для вращения, снова с $I = mR^2$:

$$m\frac{du_x}{dt} = F_x, \qquad I\frac{d\omega}{dt} = RF_\tau \;\Rightarrow\; \frac{du_\tau}{dt} = \frac{F_\tau}{m}.$$

Подставим составляющие силы и сложим векторно:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -a\frac{\vec{u}}{u}, \qquad a = \frac{F}{m}.$$

Ускорение направлено строго против $\vec{u}$, поэтому направление скорости точки контакта не меняется, а её модуль убывает линейно с тем же a, что и в первом опыте. Следовательно, ускорение второго опыта известно, а время остановки

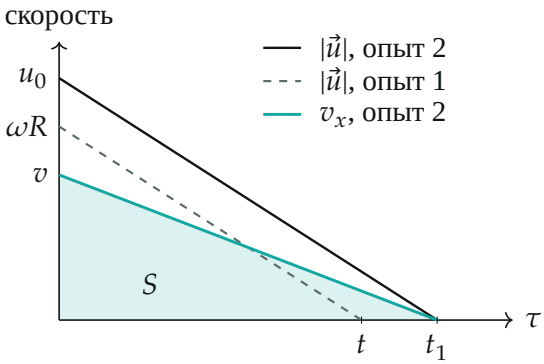
$$t_1 = \frac{u_0}{a} = \frac{\sqrt{(\omega R)^2 + v^2}}{\omega R}\, t.$$

Обратите внимание: трение нельзя считать «вдоль стержня» и «по окружности» независимо, как будто вдоль оси действует сила μN. Полная сила трения μN делится между осями пропорционально составляющим скорости, поэтому вдоль стержня шайба тормозится слабее, чем a.

3. Скорость вдоль стержня. Составляющая ускорения вдоль оси стержня — проекция $\vec{a}$ на неё, и $\cos\gamma = v/u_0$:

$$a_x = a\cos\gamma = a\,\frac{v}{u_0} = \frac{\omega R\, v}{t\sqrt{(\omega R)^2 + v^2}}.$$

Скорость шайбы вдоль стержня убывает равномерно: $v_x(\tau) = v - a_x\tau$ (τ — время во втором опыте). К моменту t_1 она равна нулю, так как $a_x t_1 = a\dfrac{v}{u_0}\cdot\dfrac{u_0}{a} = v$: останавливаются и вращение, и движение вдоль стержня одновременно.



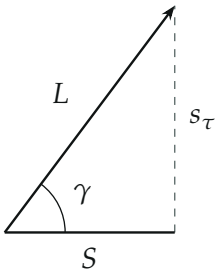
Скорости при $\omega R = 4$, $v = 3$, $t = 1$ (условные единицы): точка контакта тормозится линейно в обоих опытах, скорость вдоль стержня — пропорционально ей; закрашенная площадь равна пути S

4. Путь вдоль стержня. Путь равен площади под графиком $v_x(\tau)$, то есть площади треугольника с основанием t_1 и высотой v:

$$S = \frac{v\,t_1}{2} = \frac{v\,t\sqrt{(\omega R)^2 + v^2}}{2\,\omega R}.$$

5. Второй способ. Точка контакта движется по поверхности стержня прямолинейно (на развёртке) и равнозамедленно с ускорением a от скорости u_0 до нуля, поэтому её путь $L = \dfrac{u_0^2}{2a} = \dfrac{u_0 t_1}{2}$. Этот путь составляет угол γ с осью стержня, а S — его проекция на ось:

$$S = L\cos\gamma = \frac{u_0 t_1}{2}\cdot\frac{v}{u_0} = \frac{v t_1}{2}.$$



Путь точки контакта по развёртке стержня: отрезок L под углом γ к оси; S и s_τ — его проекции

Проверка. Размерность: vt — длина, $\sqrt{(\omega R)^2 + v^2}/(\omega R)$ безразмерно. Предел $v \gg \omega R$ (шайба почти не вращается): $S \to \dfrac{v^2 t}{2\omega R} = \dfrac{v^2}{2a}$ — обычный путь торможения с ускорением a. Энергия: начальная кинетическая энергия $\dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2} = \dfrac{mu_0^2}{2}$, работа трения на пути L равна $FL = ma\dfrac{u_0^2}{2a} = \dfrac{mu_0^2}{2}$ — совпало. Числовая проверка: при $\omega R = 4$, $v = 3$, $t = 1$ формула даёт $S = 1{,}875$, а численное решение уравнений движения того же вида — $1{,}8750$.

Обратите внимание: ответ верен только при $I = mR^2$. У настоящей шайбы с внешним радиусом $R_2 > R$ момент инерции $I = \frac{1}{2}m(R^2+R_2^2) > mR^2$: вращение тормозится медленнее, чем движение вдоль стержня, направление скорости точки контакта поворачивается к окружности, и путь выходит меньше. Численное решение тех же уравнений при $\omega R = 4$, $v = 3$, $t = 1$: $I = 1{,}5\,mR^2$ даёт $S \approx 1{,}42$, $I = 2mR^2$ — $S \approx 1{,}15$ вместо $1{,}875$.

Ответ. $S = \dfrac{v\,t\,\sqrt{(\omega R)^2 + v^2}}{2\,\omega R}$ (как у организаторов, для узкой шайбы с $I = mR^2$).