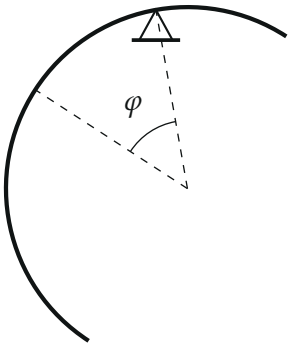
Проволочная полуокружность на опоре

Задача 5. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Из тонкой проволоки изготовили полуокружность и разместили её на точечной опоре так, как показано на рисунке (здесь φ — угол между направлением на середину полуокружности и точку контакта с опорой; см. рисунок). При каком минимальном коэффициенте трения полуокружность сможет находиться в равновесии? При каком угле φ минимальное значение коэффициента трения, обеспечивающее равновесие, является наибольшим? Найти наибольшее значение минимального коэффициента трения, удерживающего полуокружность в равновесии.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Опора касается проволоки в одной точке P и действует на неё двумя силами: нормальной, направленной по радиусу полуокружности, и силой трения вдоль касательной. На проволоку действуют ещё сила тяжести, приложенная в центре тяжести C. В равновесии вся реакция опоры (сумма нормальной силы и трения) должна уравновешивать $m\vec{g}$, то есть быть вертикальной. Значит, полуокружность сама поворачивается вокруг точки P так, чтобы C оказался на вертикали с P, а реакция вертикальна и наклонена к нормали на некоторый угол ψ. Трение может создать такой наклон, только если $\operatorname{tg}\psi \leqslant \mu$. Всё сводится к геометрии: найти ψ при данном φ и затем максимум по φ.

Обозначения. R — радиус полуокружности; m — её масса; O — центр окружности; C — центр тяжести; $d = OC$ — расстояние от

центра до центра тяжести; P — точка контакта; ψ — угол между вертикалью PC и радиусом PO; N — нормальная сила, $F_{\text{тр}}$ — трение; μ — коэффициент трения.

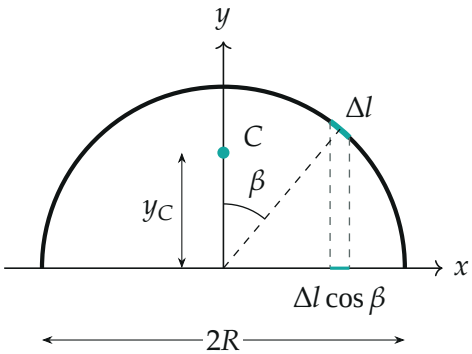
1. Центр тяжести проволочной полуокружности. Из симметрии он лежит на оси симметрии (на радиусе к середине дуги), поэтому осталось найти расстояние $d = y_C$ вдоль неё. Разобьём проволоку на малые участки Δl_i (линейная плотность $\lambda = \dfrac{m}{\pi R}$, масса участка $\lambda\,\Delta l_i$). Ось y направим по оси симметрии: точка участка с радиусом, составляющим угол β_i с осью, имеет координату $y_i = R\cos\beta_i$. По формуле для центра масс

$$y_C = \frac{\sum \lambda\,\Delta l_i\, R\cos\beta_i}{m} = \frac{\lambda R}{m}\sum \Delta l_i\cos\beta_i.$$

Касательная в точке участка наклонена к диаметру на тот же угол β_i, поэтому $\Delta l_i\cos\beta_i$ — проекция участка на диаметр. Проекции всех участков идут в одну сторону и складываются в сам диаметр, $\sum \Delta l_i\cos\beta_i = 2R$. Следовательно,

$$d = y_C = \frac{\lambda R\cdot 2R}{m} = \frac{2R}{\pi} \approx 0{,}64\,R.$$

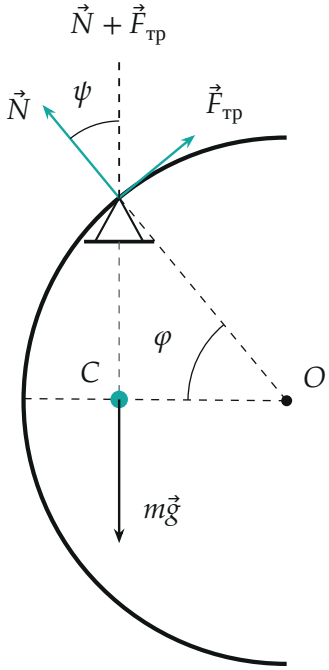
Обратите внимание: центр тяжести проволочной дуги $2R/\pi$ дальше от центра, чем центр тяжести сплошного полукруга ($4R/3\pi \approx 0{,}42\,R$).



Полуокружность из проволоки: проекции малых участков Δl на диаметр в сумме дают $2R$, центр тяжести C лежит на оси симметрии на высоте y_C

2. Условие равновесия. На проволоку действуют три силы: $m\vec{g}$ в точке C, $\vec{N}$ вдоль PO (по нормали к проволоке в точке P, от центра) и $\vec{F}_{\text{тр}}$ вдоль касательной. Из равенства нулю суммы сил $\vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = -m\vec{g}$: реакция опоры вертикальна и равна mg. Запишем равенство нулю момента сил относительно точки P: у $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ плеч относительно P нет, поэтому момент $m\vec{g}$ тоже должен быть нулевым, то есть линия действия $m\vec{g}$ проходит через P. Значит, C лежит на вертикали через P (рисунок). Вертикальная реакция составляет с нормалью $\vec{N}$ угол ψ, и

$$N = mg\cos\psi, \qquad F_{\text{тр}} = mg\sin\psi.$$



Равновесие полуокружности: линия действия силы тяжести проходит через точку опоры, а сумма нормальной силы $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$ вертикальна и равна по модулю mg

3. Когда трения хватает. Проволока не скользит, если сила трения покоя не больше предельной: $F_{\text{тр}} \leqslant \mu N$. Подставляем N и $F_{\text{тр}}$ из преды-

дущего пункта:

$$mg\sin\psi \leqslant \mu\, mg\cos\psi \quad \Rightarrow \quad \mu \geqslant \operatorname{tg}\psi.$$

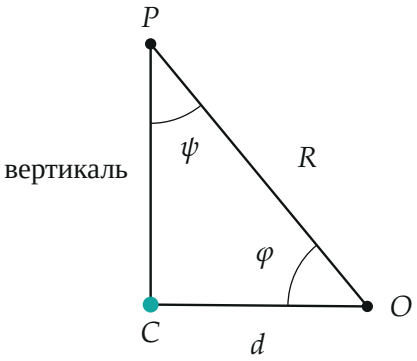
То есть $\mu_{\min} = \operatorname{tg}\psi$, где ψ — угол между вертикалью и нормалью к проволоке в точке опоры.

4. Угол ψ из треугольника OPC. В треугольнике OPC известны две стороны $OP = R$ и $OC = d = \dfrac{2R}{\pi}$ и угол между ними при вершине O, равный φ (угол между направлением на середину дуги и на точку контакта). Угол при вершине P равен ψ. Опустим из C высоту CH на OP: $CH = d\sin\varphi$, $HP = R - d\cos\varphi$, поэтому

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{CH}{HP} = \frac{d\sin\varphi}{R - d\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\dfrac{\pi}{2} - \cos\varphi},$$

где мы подставили $d = 2R/\pi$ и поделили числитель и знаменатель на d. Поэтому

$$\mu_{\min} = \frac{\sin\varphi}{\dfrac{\pi}{2} - \cos\varphi}.$$



Треугольник OPC: $OP = R$, $OC = d = \dfrac{2R}{\pi}$, угол при O равен φ, угол при P между вертикалью PC и радиусом PO равен ψ

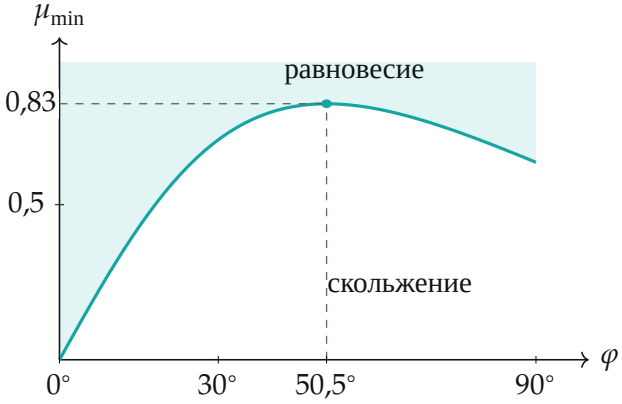
5. При каком φ нужен наибольший $\mu_{\min}$. Найдём максимум функции $f(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{a - \cos\varphi}$, где $a = \dfrac{\pi}{2}$. Производная

$$f'(\varphi) = \frac{\cos\varphi\,(a - \cos\varphi) - \sin^2\varphi}{(a - \cos\varphi)^2} = \frac{a\cos\varphi - 1}{(a - \cos\varphi)^2}.$$

Она равна нулю при $\cos\varphi = \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{\pi}$, то есть при $\varphi_* = \arccos\dfrac{2}{\pi} \approx 50{,}5°$; при меньших φ производная положительна, при больших — отрицательна, значит, это максимум. Подставим: $\sin\varphi_* = \dfrac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}$, $a - \cos\varphi_* = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{\pi^2 - 4}{2\pi}$, откуда

$$(\mu_{\min})_{\max} = \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{\pi^2 - 4} = \frac{2}{\sqrt{\pi^2 - 4}} \approx 0{,}83.$$

При μ больше этого значения полуокружность остаётся в равновесии при любом положении опоры, при меньшем — существуют положения, где она соскальзывает.



Минимальный коэффициент трения в зависимости от φ: выше кривой покой, ниже скольжение; максимум 0,83 при $\varphi \approx 50{,}5°$

Проверка. Размерность: μ безразмерен. Предел $\varphi = 0$ (опора под серединой дуги): C лежит на одной вертикали с O и P, $\psi = 0$, $\mu_{\min} = 0$ — формула даёт 0. Предел $\varphi = 90°$ (опора на конце дуги): $OC \perp OP$, $\operatorname{tg}\psi = d/R = 2/\pi$, формула: $\dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$ — совпало. Численная проверка (python): центр масс дуги из $2 \cdot 10^5$ точек даёт $0{,}6366\,R$, а наибольший $\mu_{\min} = 0{,}8255$ достигается при $\varphi = 50{,}46°$. Смысл: чем ближе опора к середине дуги, тем меньше наклон касательной и тем меньше трения нужно.

Ответ. $\mu_{\min} = \dfrac{\sin\varphi}{\dfrac{\pi}{2} - \cos\varphi}$; наибольшее значение достигается при $\cos\varphi = \dfrac{2}{\pi}$ ($\varphi \approx 50{,}5°$) и равно $(\mu_{\min})_{\max} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi^2 - 4}} \approx 0{,}83$.