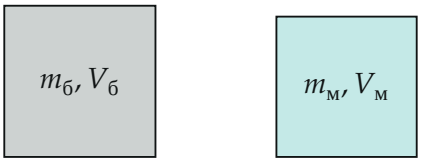
Детали из двух металлов

Задача 1. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 7 класс, задача 1] На заводе изготовили большие детали из одного металла, и малые детали – из другого. Известно, что масса большой детали на 20 % больше массы малой, а объем малой детали на 20 % меньше объема большой. Найти отношение масс двух одинаковых ящиков, полностью заполненных большими и малыми деталями.

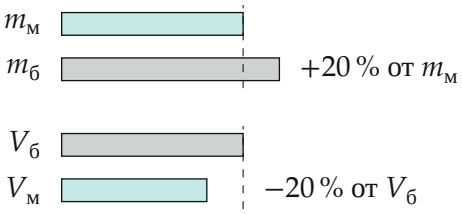


Поясняющий рисунок: большая и малая детали из разных металлов (объёмы в масштабе: $V_м = 0{,}8V_б$)

▲ **Решение. Что происходит.** Ящик полностью заполнен деталями, ящики одинаковые — значит, в обоих ящиках одинаковый объём металла. Масса при одинаковом объёме пропорциональна плотности. Поэтому отношение масс ящиков — это отношение плотностей металлов, а плотности найдём по массе и объёму одной детали. Класс задачи — плотность вещества.

Обозначения. $m_б$, $V_б$ — масса и объём большой детали; $m_м$, $V_м$ — малой; $\rho_б$, $\rho_м$ — плотности металлов; V — объём металла в ящике; $M_б$, $M_м$ — массы ящиков с большими и малыми деталями.

1. Переводим проценты в равенства. «На 20 % больше массы малой» — от массы малой: $m_б = m_м + 0{,}2m_м = 1{,}2\,m_м$. «На 20 % меньше объёма большой» — от объёма большой: $V_м = V_б - 0{,}2V_б = 0{,}8\,V_б$.



Проценты отсчитываются от разных величин: масса — от малой детали, объём — от большой

2. Плотности. Плотность — масса единицы объёма, $\rho = m/V$:

$$\rho_б = \frac{m_б}{V_б} = \frac{1{,}2\,m_м}{V_б}, \qquad \rho_м = \frac{m_м}{V_м} = \frac{m_м}{0{,}8\,V_б}.$$

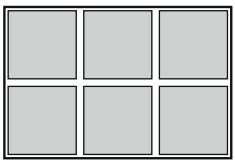
Поделим одно на другое — $m_м$ и $V_б$ сократятся:

$$\frac{\rho_б}{\rho_м} = 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96.$$

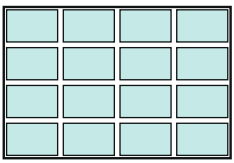
Металл больших деталей чуть менее плотный.

3. Массы ящиков. В каждом ящике объём металла один и тот же V (ящики одинаковые и заполнены полностью), поэтому

$$\frac{M_б}{M_м} = \frac{\rho_б V}{\rho_м V} = \frac{\rho_б}{\rho_м} = 0{,}96.$$



$M_б = \rho_б V$



$M_м = \rho_м V$

Одинаковые ящики, заполненные целиком: объём металла V один и тот же, массы отличаются только плотностью



Ответ в масштабе: ящик с большими деталями на 4 % легче

Обратите внимание. Плюс 20 % и минус 20 % не компенсируют друг друга: $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$, а не 1. Это потому, что проценты взяты от разных величин.

Проверка. Числа: пусть $m_{м} = 10$ г, $V_{б} = 10$ см^3. Тогда $m_{б} = 12$ г, $V_{м} = 8$ см^3, $\rho_{б} = 1{,}2$ г/см^3, $\rho_{м} = 1{,}25$ г/см^3; отношение $1{,}2/1{,}25 = 0{,}96$ — совпало. Ответ безразмерный, как и положено отношению масс.

Смысл: заполненный ящик «взвешивает» плотность металла, а размер деталей не важен.

Ответ. $\dfrac{M_{б}}{M_{м}} = 0{,}96$ (ящик с большими деталями легче).