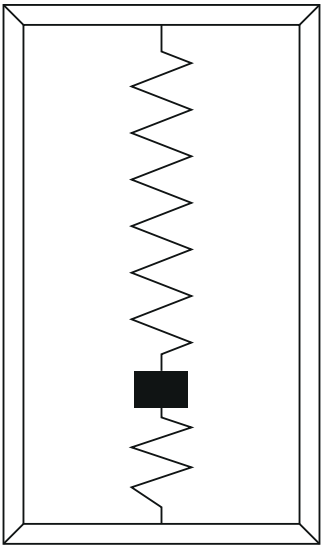
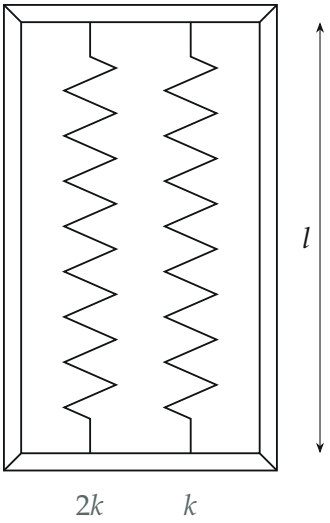
Тело между двумя пружинами

Задача 3. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 7 класс, задача 3] Две пружины с коэффициентами жесткости k и $2k$ и длиной в недеформированном состоянии l прикрепили к торцам неподвижной вертикальной рамки высотой l (более жесткая пружина сверху). Затем между пружинами закрепили тело массой m. На какой высоте от нижнего торца рамки будет находиться положение равновесия тела? Размеры тела малы. Пружины вертикальны. Считать, что при любых деформациях пружин справедлив закон Гука: $F_{\text{упр}} = k\,\Delta x$, где Δx — деформация пружины.



▲ **Решение. Что происходит.** Каждая пружина в свободном состоянии длиной ровно с рамку. Тело где-то между торцами, поэтому обе пружины короче l — обе *сжаты*. Нижняя толкает тело вверх, верхняя — вниз, и вниз же тянет сила тяжести. В равновесии сумма сил равна нулю. Сжатия пружин выражаются через одну неизвестную — высоту тела. Класс задачи — равновесие тела на двух пружинах.

Обозначения. x — высота тела над нижним торцом рамки; ось y — вертикально вверх.

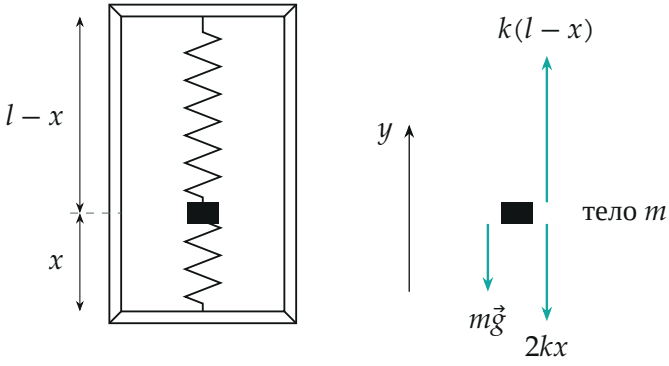


Без тела каждая пружина недеформирована и как раз дотягивается до противоположного торца (для наглядности пружины разнесены: $2k$ висит сверху, k стоит снизу)

1. Деформации пружин. Нижняя пружина идёт от нижнего торца до тела: её длина x, сжатие $l-x$. Верхняя идёт от тела до верхнего торца: её длина $l-x$, сжатие $l-(l-x)=x$. По закону Гука модули сил упругости:

$$F_{\text{н}} = k(l-x) \text{ (вверх)}, \qquad F_{\text{в}} = 2kx \text{ (вниз)}.$$

Направления: сжатая пружина расталкивает свои концы, поэтому нижняя толкает тело вверх, верхняя — вниз.

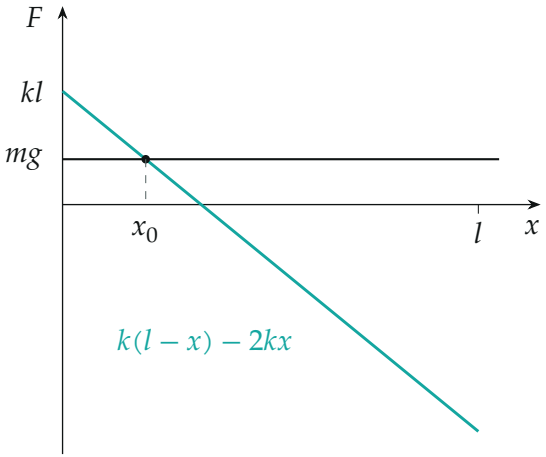


Тело на высоте x: нижняя пружина сжата на $l-x$ и толкает вверх, верхняя сжата на x и толкает вниз. Справа — силы на тело

2. Равновесие. Второй закон Ньютона для тела в покое в проекции на ось y:

$$k(l-x)-mg-2kx=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{kl-mg}{3k}=\frac{l}{3}-\frac{mg}{3k}.$$

3. Когда ответ теряет смысл. При $mg \geq kl$ формула даёт $x \leq 0$: тело должно оказаться у нижнего торца или ниже. Это значит, что нижняя пружина, сжатая до конца, не держит тело: даже без верхней пружины её сила не больше kl. Тело опустится на нижний торец рамки, $x=0$.



Суммарная сила пружин (вверх) от высоты тела — прямая $k(l-3x)$; равновесие x_0 там, где она равна mg (построено для $mg=0{,}4\,kl$, $x_0=0{,}2\,l$)

Обратите внимание. Обе пружины сжаты, и сила верхней направлена вниз, вместе с силой тяжести. Ошибка — считать, что верхняя пружина «держит» тело.

Проверка. Размерность: mg/k — длина. Предел $m\to 0$: $x=l/3$ — лёгкое тело стоит там, где силы пружин равны: $k(l-x)=2kx$, ближе к мягкой пружине (её надо сжать вдвое сильнее) — верно. Числа: $mg=0{,}4\,kl$, $x=0{,}2\,l$: нижняя толкает вверх $0{,}8\,kl$, вниз — $0{,}4\,kl$ (верхняя) и $0{,}4\,kl$ (тяжесть), сумма ноль — верно.

Смысл: обе пружины работают «против» друг друга, и их общая жёсткость $3k$ — поэтому вес тела смещает его вниз на $mg/(3k)$ от точки $l/3$.

Ответ. $x = \dfrac{kl - mg}{3k}$ при $mg < kl$; при $mg \geq kl$ тело лежит на нижнем торце рамки ($x = 0$).