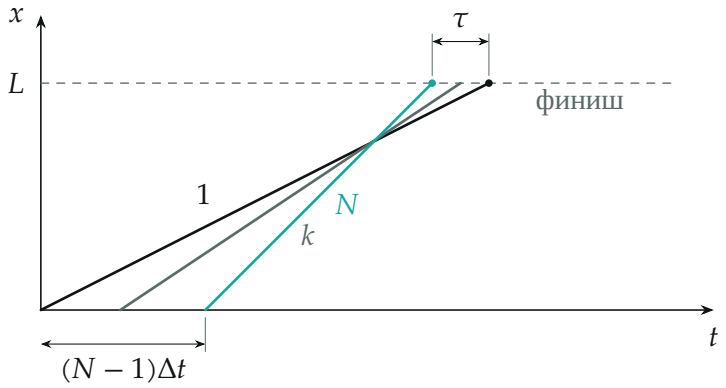
Лыжники: обратный порядок старта

Задача 4. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 7 класс, задача 4] $N = 30$ лыжников бежали индивидуальную гонку с раздельным стартом: каждый последующий участник стартовал на $\Delta t = 30$ с позже предыдущего. При этом продолжительность финиша (т.е. промежуток времени между первым и последним пересечениями финишной черты) составила $\tau = 5$ минут. Первым к финишу пришел спортсмен, стартовавший последним, а последним пришел спортсмен, стартовавший первым. Какой была бы продолжительность финиша, если бы лыжники стартовали в обратном порядке с теми же интервалами и пробежали бы дистанцию с теми же результатами?

▲ **Решение. Что происходит.** Каждый лыжник бежит дистанцию за своё время, и это время от порядка старта не зависит. Меняется только момент старта, а значит, и момент финиша. Главная идея: момент финиша = момент старта + время на дистанции. Из прямого порядка найдём, насколько самый медленный медленнее самого быстрого, и подставим в обратный порядок. Класс задачи — равномерное движение и «часы»: всё считаем моментами времени на одних часах.

Обозначения. Номер лыжника k — по порядку старта в гонке ($k = 1, \ldots, N$). t_k — время, за которое k-й лыжник прошёл дистанцию. Часы запускаем в момент первого старта. Тогда в гонке k-й стартует в момент $(k-1)\Delta t$, а в обратном порядке — в момент $(N-k)\Delta t$.



Гонка: график «координата — время» для первого, k-го и последнего стартовавших. Последний (N) финиширует первым, первый — последним

1. Момент финиша. Лыжник бежит дистанцию за время t_k, начиная с момента старта. Поэтому в гонке k-й финиширует в момент

$$T_k = (k-1)\Delta t + t_k.$$

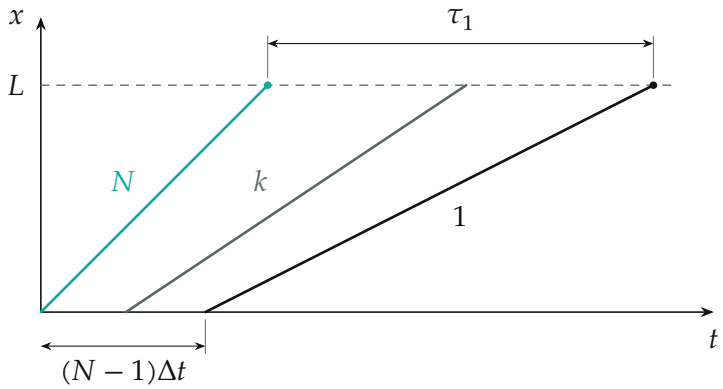
По условию первым финишировал N-й, последним — 1-й. Продолжительность финиша — разность моментов последнего и первого пересечения черты:

$$\tau = T_1 - T_N = t_1 - \left[(N-1)\Delta t + t_N\right] = t_1 - t_N - (N-1)\Delta t.$$

Отсюда первый медленнее последнего на

$$t_1 - t_N = \tau + (N-1)\Delta t.$$

Знак понятен по рисунку: первый стартовал на $(N-1)\Delta t$ раньше и всё равно пришёл на τ позже, значит, на дистанции он провёл больше на сумму этих промежутков.



Обратный порядок: самый быстрый (N) стартует первым, самый медленный (1) — последним. Те же наклоны прямых, сдвинутые старты

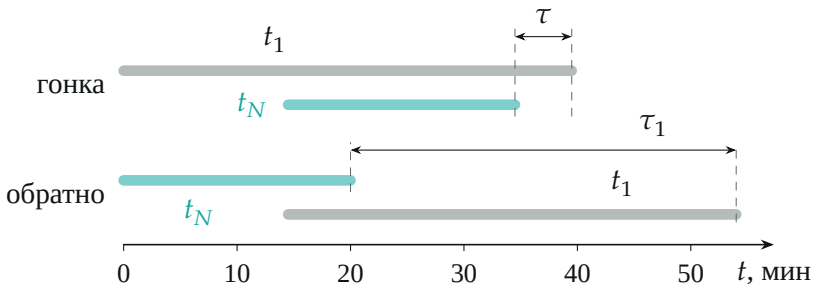
2. Обратный порядок старта. Теперь k-й стартует в момент $(N -$

$k)\Delta t$ и финиширует в момент

$$T'_k = (N-k)\Delta t + t_k.$$

Первым стартует самый быстрый (N-й), последним — самый медленный (1-й). Первым придёт N-й: $T'_N = t_N$, последним — 1-й: $T'_1 = (N-1)\Delta t + t_1$. Продолжительность финиша

$$\tau_1 = T'_1 - T'_N = t_1 - t_N + (N-1)\Delta t.$$



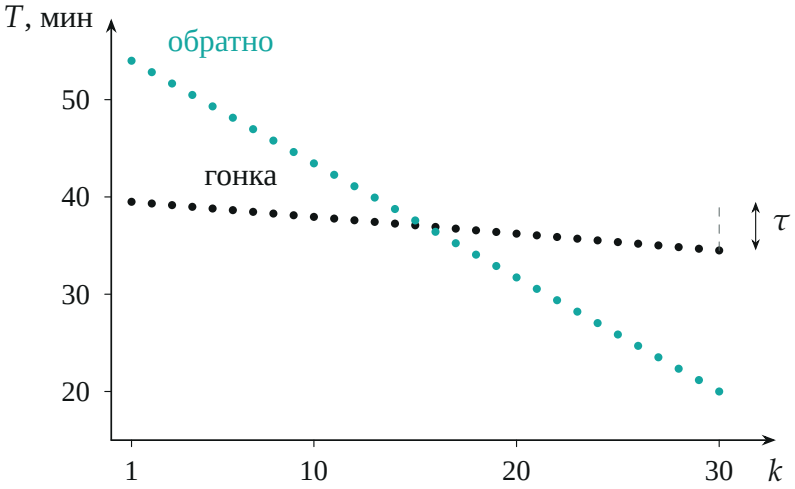
Пребывание на дистанции самого медленного (t_1, серый) и самого быстрого (t_N, бирюзовый) в числах ответа при $t_N = 20$ мин: в гонке полосы почти совпадают концами, в обратном порядке — расходятся

3. Ответ через данные. Подставим разность из пункта 1:

$$\tau_1 = [\tau + (N-1)\Delta t] + (N-1)\Delta t = \tau + 2(N-1)\Delta t.$$

Числа: $(N-1)\Delta t = 29 \cdot 0{,}5$ мин $= 14{,}5$ мин, $\tau_1 = 5 + 2 \cdot 14{,}5 = 34$ мин.

Обратите внимание: в пункте 2 мы взяли, что в обратном порядке первым придёт N-й, а последним — 1-й. Это надо проверить и для остальных лыжников. Из условия $T_k \geqslant T_N$ получаем $t_k - t_N \geqslant (N-k)\Delta t$, поэтому $T'_k - T'_N = (N-k)\Delta t + t_k - t_N \geqslant 2(N-k)\Delta t \geqslant 0$. Аналогично из $T_1 \geqslant T_k$ следует $T'_1 - T'_k \geqslant 2(k-1)\Delta t \geqslant 0$. Значит, все остальные финишируют между ними, и τ_1 найдена верно.



Пример: моменты финиша T всех 30 лыжников при времени на дистанции, равномерно убывающем от 39,5 до 20 мин. Чёрные точки — гонка (разброс $\tau = 5$ мин), бирюзовые — обратный порядок (разброс 34 мин); крайние точки — лыжники 1 и N

Проверка. Размерность: все слагаемые — время. Предел $\Delta t \to 0$ (общий старт): порядок старта ничего не меняет, и формула даёт $\tau_1 = \tau$. Второй способ: переход от гонки к обратному порядку задерживает старт 1-го на $(N-1)\Delta t$ и сдвигает старт N-го на $(N-1)\Delta t$ раньше, поэтому разрыв между их финишами растёт на $2(N-1)\Delta t$: $5 + 29 = 34$ мин.

Смысл: в гонке задержка старта быстрых почти «съела» их преимущество в скорости, а в обратном порядке задержка старта медленных добавляется к их отставанию.

Ответ. $\tau_1 = \tau + 2(N-1)\Delta t = 34$ мин.